Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

DEPARTAMENTO DE FISICA

Estados coherentes para Hamiltonianos cuadráticos tridimensionales con simetría axial

Tesis que presenta

Mercedes Paulina Velázquez Quesada

para obtener el Grado de

Maestra en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. David José Fernández Cabrera**

México, Distrito Federal Marzo, 2007

Dedico este trabajo a mi querida familia:

A mis padres Fernando Velázquez y Marta Quesada.

A mis hermanos Fernando, Inés y Susana.

A Balam.

Agradecimientos

A los mexicanos por que, a través del CONACyT, me dieron la oportunidad de formar parte del Instituto Politécnico Nacional como estudiante en su Centro de Investigación y Estudios Avanzados.

Al departamento de Física del CINVESTAV por el apoyo otorgado. A su personal administrativo y de intendencia porque con su trabajo facilitó mi desempeño.

A todos los profesores que han contribuido a mi formación, en especial a los que además de compartirme sus conocimientos y darme orientación, me alientan con su ejemplo a continuar en este camino.

A los doctores Bogdam Mielnik y Gabino Torres por su amabilidad en la revisión de este trabajo.

Un sincero agradecimiento al Dr. David José Fernández Cabrera por la oportunidad de trabajar bajo su asesoría, la disponibilidad y paciencia mostrada en todo momento. Le agradezco en especial su ardua labor en la corrección de este texto.

Para mi familia, mi más profundo agradecimiento por ser mi orgullo y porra incondicional, por todo el cariño, la comprensión y la confianza.

A la familia Velázquez Gonzáles por su hospitalidad y calidez .

Por ser parte de mi vida y por los tiempos alegres y difíciles que hemos compartido a lo largo de estos años, a mis queridos amigos: Lupita, Olivia, Alejandrina, Vannya, Memo, Balam y Adrián.

A las muchachas por aquellos domingos de tareas y risas. A Xavier y Alejandro por que en tan poco tiempo supieron transmitirme su entusiasmo.

A mis compañeros en el Departamento de Física por todos los momentos que disfruté con ellos. A Aldo, Elohim y Pablo por los consejos, el apoyo y por el ejemplo.

A Brisa por ser mi compañera en este esfuerzo, por la amistad y complicidad compartidas.

A aquellos que se saben parte de mi aunque su nombre no figure en estas páginas.

Velázquez Quesada
Mercedes Paulina
marzo 2007

Índice general

Resumen

En esta tesis se derivarán los estados coherentes para Hamiltonianos cuadráticos tridimensionales que poseen simetría de rotación alrededor del eje z. En el primer capítulo presentaremos una técnica matricial, que permite identificar directamente los operadores de creación y aniquilación, mediante el caso del oscilador estándar y repulsivo unidimensionales. Posteriormente, haremos un tratamiento similar para un caso bidimensional ilustrativo: la superposición de un oscilador repulsivo y un momento angular. Aplicaremos después la técnica matricial a los Hamiltonianos tridimensionales mencionados previamente, y se derivarán los correspondientes estados coherentes. Finalmente se desarrollarán algunos ejemplos para ilustrar la aplicación del método.

Abstract

In this thesis we will derive the coherent states for three-dimensional quadratic Hamiltonians with rotation symmetry around z axis. In the first chapter, we will present a matrix method that allows to identify directly the creation and annihilacion operators, by through the case of the standar and repulsive onedimensional oscillator. Then, we will perform a similar treatment for an illustrative two-dimensional case: the superposition of a repulsive oscillator and an angular momentum. We will apply the same matrix method to the three-dimensional Hamiltonians mentioned previously, and the corresponding coherent states will be derived. Finally, some examples to illustrate the method will be developed.

Capítulo 1

Introducción

Los estados coherentes (EC) fueron construidos inicialmente por Schrödinger en 1926 mientras buscaba estados mecánico cuánticos del oscilador armónico que llevaran a predicciones físicas similares a las de los estados clásicos, al menos en el límite macroscópico. Para tales estados cuánticos los valores esperados de los operadores de posición $\langle X_i \rangle(t)$ y momento $\langle P_i \rangle(t)$ deben ser funciones periodicas del tiempo y no iguales a cero para todo t, como ocurre para los eigenestados del operador energia del oscilador armónico.

Los vectores con estas características que encontró Schrödinger resultaron ser eigenestados del operador de aniquilación del oscilador armónico. A partir de este trabajo se empezó a desarrollar la teoría de los estados coherentes (autores como Fock, Iwata, Sudarshan, Rash, Klauder entre otros se mencionan en [1]). Roy Glauber fué quien introdujo el término Estados Coherentes al utilizar estados construidos de modo análogo a los encontrados por Schrödinger para trabajar correlaciones entre fotones [2], [3]. Sólo después de las contribuciones de Glauber los estados coherentes fueron ampliamente conocidos e intensamente usados en varios dominios de la física y las matemáticas. Durante este desarrollo, el formalismo ha sido generalizado mediante definiciones con alto grado de complejidad matemática, como puede verse en los artículos [4], [5] [6], [7], libros [8], entre otros (ver [9], [10]). En este trabajo nos restringiremos a las definiciones inicialmente introducidas por Glauber [3], las cuales están basadas en propiedades bien conocidas del oscilador armónico pero que serán usadas para sistemas más generales.

1. Los estados coherentes $|z\rangle$ son eigenestados, con eigenvalor complejo z,

del operador de aniquilación a del oscilador armónico, es decir

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Por otro lado, para el oscilador armónico se puede identificar un operador unitario D, que depende de la variable compleja z y actúa como operador de desplazamiento sobre las observables canónicas X y P, el cual está dado por

$$D(z) = e^{za^\dagger - z^* a}, \tag{1.2}$$

donde $a^\dagger$ es el operador de creación estándar. Por tanto, surge una segunda definición.

2. Los estados coherentes $|z\rangle$ resultan de aplicar el operador de desplazamiento $D(z)$ sobre el estado base $|\psi_0\rangle$ del oscilador, es decir

$$|z\rangle = D(z)|\psi_0\rangle. \tag{1.3}$$

Por último, presentamos una propiedad de los estados coherentes que ha llegado a tomarse como otra posible definición.

3. Los estados coherentes $|z\rangle$ son estados cuánticos que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg para X y P, la cual en unidades adimensionales en las que $\hbar = 1$ se expresa

$$(\Delta X)_z (\Delta P)_z = \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

donde, para un sistema en el estado coherente $|z\rangle$ y un operador arbitrario $\mathcal{O}$, la dispersión $(\Delta\mathcal{O})_z$ se define como:

$$(\Delta\mathcal{O})_z^2 = \langle z|(\mathcal{O} - \langle z|\mathcal{O}|z\rangle)^2|z\rangle = \langle z|\mathcal{O}^2|z\rangle - \langle z|\mathcal{O}|z\rangle^2 = \langle\mathcal{O}^2\rangle_z - \langle\mathcal{O}\rangle_z^2.$$

Otra propiedad importante del conjunto de estados coherentes de un sistema, cualquiera que sea su naturaleza, es la completez. De hecho, resulta que ellos forman un conjunto sobrecompleto en el sentido de que para cualquier secuencia convergente de números complejos z_n los estados coherentes correspondientes $|z_n\rangle$ forman un conjunto completo [11]. Sobre esta característica, en especial, existe un análisis muy interesante en [12].

Como se discute en [13], para el oscilador armónico la primera y segunda definiciones conducen a los mismos estados coherentes y éstos a su vez satisfacen la ecuación 1.4, así como la ecuación de completez. Sin embargo, no todo estado del oscilador que satisface la tercera definición lo hace con las otras dos, es decir, ésta es demasiado amplia por lo cual es preferible construir los estados coherentes mediante las dos primeras definiciones y considerar 1.4 únicamente como una propiedad resultante.

En este trabajo generaremos los estados coherentes partiendo tanto de la definición que los considera como eigenvectores de los operadores de aniquilación del operador número del sistema, como de la dada por la ecuación 1.3. Para hacerlo, debemos primero identificar el álgebra del Hamiltoniano, expresarlo después en términos de sus operadores número y obtener explícitamente los operadores de creación y aniquilación. La técnica que emplearemos está estrechamente relacionada con el conocido método de factorización y será desarrollada a manera de ejemplo para dos sistemas sencillos en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Técnica matricial

2.1. Oscilador unidimensional atractivo y repulsivo

Para introducir la técnica matricial que vamos a ocupar a lo largo de esta tesis, trabajaremos inicialmente con el oscilador armónico en una dimensión, pero le daremos una libertad extra. Tomaremos el Hamiltoniano como

$$H = \frac{P^2}{2} + \epsilon \frac{X^2}{2}, \tag{2.1}$$

donde ϵ puede tomar los valores $+1$ y -1, es decir, trabajaremos con un oscilador que puede ser atractivo o repulsivo. Con el oscilador atractivo veremos que nuestros resultados coinciden con los conocidos y con el repulsivo encontraremos algunas generalidades que se pueden obtener con esta técnica.

Definimos el "vector-operador" $|q\rangle = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}$, donde X y P son operadores canónicos en una dimensión. Notemos que $|q\rangle$ (así como $|q(t)\rangle$) no representa el vector de un estado cuántico, sino un vector formal cuyas componentes son operadores. Entonces, las ecuaciones de Heisenberg para el movimiento estarán dadas por

$$\frac{dq_j(t)}{dt} = [iH, q_j(t)], \qquad j = 1, 2.$$

Ahora, ya que el Hamiltoniano es cuadratico en X y P, podemos escribir las dos ecuaciones anteriores en forma matricial para el vector $|q(t)\rangle$

$$\frac{d|q(t)\rangle}{dt} = [iH, |q(t)\rangle] = \mathbf{\Lambda}|q(t)\rangle, \tag{2.2}$$

con $\mathbf{\Lambda}$ una matrix 2×2 que en este caso tiene la forma explícita

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Vamos ahora a encontrar los eigenvectores y las eigenformas de la matriz $\mathbf{\Lambda}$, a partir de los cuales obtendremos los operadores de subida y bajada para los estados del oscilador. Notemos que si $\epsilon = 1$, la matriz Λ no es hermitiana; por tanto, en este caso las eigenformas no serán necesariamente los adjuntos de los eigenvectores.

La ecuación característica de esta matriz es $\lambda^2 = -\epsilon$, de modo que los eigenvalores están dados por $\lambda_\pm = \pm\sqrt{-\epsilon} = \pm\, i\sqrt{\epsilon}$. Notemos que si $\epsilon = -1$, $\lambda = i\sqrt{\epsilon}$ será real, mientras que para $\epsilon = 1$ tendremos λ imaginaria.

Si denotamos $|u^\pm\rangle$ al eigenvector asociado al eigenvalor $\lambda_\pm = \pm\, i\sqrt{\epsilon}$, obtenemos que

$$|u^+\rangle = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\epsilon} \end{pmatrix}, \qquad |u^-\rangle = a_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\epsilon} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

donde a_1 y a_2 son constantes complejas aún por determinar. Mientras tanto, las eigenformas estarán dadas por

$$\langle e^+| = o_1\Big(1, \frac{-i}{\sqrt{\epsilon}}\Big), \qquad \langle e^-| = o_2\Big(1, \frac{i}{\sqrt{\epsilon}}\Big), \tag{2.5}$$

con o_1 y o_2 constantes complejas. Tenemos entonces que $\mathbf{\Lambda}|u^\pm\rangle = \lambda_\pm|u^\pm\rangle$ y $\langle e^\pm|\mathbf{\Lambda} = \lambda_\pm\langle e^\pm|$.

La normalización ahora se hace exigiendo que

$$\langle e^\pm|u^\pm\rangle = 1. \tag{2.6}$$

De hecho, se puede demostrar que en general se cumple

$$\langle e^\pm|u^\mp\rangle = 0, \tag{2.7}$$

es decir, las eigenformas y eigenvectores que corresponden a eingenvalores distintos son ortogonales entre si (ver apéndice A). Es más, si el eigenvalor es puramente imaginario se tiene que $(\lambda_-)^* = \lambda_+$ y los eigenvectores correspondientes conviene escogerlos complejos conjugados entre sí (ver sección 3.2).

Tomando, para normalizar, $a_1 = \frac{1}{2o_1}$ y $a_2 = \frac{1}{2o_2}$ tendremos que

$$|u^+\rangle\langle e^+| + |u^-\rangle\langle e^-| = \mathbf{1}. \tag{2.8}$$

Escogiendo $|u^+\rangle^* = |u^-\rangle$ y $\langle e^+|^* = \langle e^-|$, resultará que $o_1^* = o_2$.

Definamos ahora los operadores $L^+ = \langle e^+|q\rangle$ y $L^- = \langle e^-|q\rangle$ que obedecen la relación de conmutación

$$[H, L^\pm] = -i\langle e^\pm|\big[iH, |q\rangle\big] = -i\langle e^\pm|\mathbf{\Lambda}|q\rangle = -i(\pm i\sqrt{\epsilon})\langle e^\pm|q\rangle = \pm\sqrt{\epsilon}\, L^\pm. \tag{2.9}$$

Por tanto, L^+ y L^- serán los operadores de subida y bajada respectivamente de los eigenvectores del operador H, que denotaremos por $|\psi_n\rangle$. Notemos sin embargo que si $\sqrt{\epsilon}$ es imaginario, el nuevo eigenvector $L^+|\psi_n\rangle$ tendrá un eigenvalor imaginario, cuyo significado debemos analizar cuidadosamente.

En nuestro caso tenemos

$$L^+ = o_1\left(X - \frac{iP}{\sqrt{\epsilon}}\right), \qquad L^- = o_1^*\left(X + \frac{iP}{\sqrt{\epsilon}}\right) \tag{2.10}$$

y se puede calcular el conmutador

$$[L^-, L^+] = |o_1|^2\left[X + \frac{iP}{\sqrt{\epsilon}}, X - \frac{iP}{\sqrt{\epsilon}}\right] = |o_1|^2\frac{2}{\sqrt{\epsilon}}. \tag{2.11}$$

Podemos ahora definir nuevos eigenvectores $|\tilde{u}^\pm\rangle$ y eigenformas $\langle\tilde{e}^\pm|$ de la matriz $\mathbf{\Lambda}$ en la forma

$$\begin{aligned} |\tilde{u}^\pm\rangle &= \sqrt{\big|[L^-, L^+]\big|}\,|u^\pm\rangle = \sqrt{2}\,|o_1||u^\pm\rangle, \\ \langle\tilde{e}^\pm| &= \frac{1}{\sqrt{\big|[L^-, L^+]\big|}}\langle e^\pm| = \frac{1}{\sqrt{2}\,|o_1|}\langle e^\pm| \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde hemos usado que ϵ toma sólo los valores 1 y -1.

Entonces, los nuevos operadores $A^\pm = \langle\tilde{e}^\pm|q\rangle = \frac{L^\pm}{\sqrt{2}\,|o_1|}$ cumplen las mismas relaciones de conmutación con H

$$[H, A^\pm] = \frac{[H, L^\pm]}{\sqrt{2}|o_1|} = \frac{\pm\sqrt{\epsilon}L^\pm}{\sqrt{2}|o_1|} = \pm\sqrt{\epsilon}A^\pm, \tag{2.13}$$

aunque entre sí satisfacen

$$[A^-, A^+] = \frac{[L^-, L^+]}{\big|[L^-, L^+]\big|} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \equiv \gamma. \tag{2.14}$$

Notemos que el módulo de éste último conmutador es unitario, el cual definiremos como γ.

La forma explícita de estos operadores es

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{o_1}{\sqrt{2}\,|o_1|}\Big(X - \frac{iP}{\sqrt{\epsilon}}\Big), \\ A^- &= \frac{o_1^*}{\sqrt{2}\,|o_1|}\Big(X + \frac{iP}{\sqrt{\epsilon}}\Big). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Vemos que si $\epsilon = 1$, es decir, en el caso del oscilador armónico atractivo, llegamos a los operadores usuales de subida y bajada, excepto por un factor fase

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{o_1}{\sqrt{2}\,|o_1|}(X - iP), \\ A^- &= \frac{o_1^*}{\sqrt{2}\,|o_1|}(X + iP). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Sin embargo, la forma de estos operadores para el caso en que $\epsilon = -1$ cambia, ya que los eigenvalores son reales, y tendremos

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{o_1}{\sqrt{2}\,|o_1|}(X - P), \\ A^- &= \frac{o_1^*}{\sqrt{2}\,|o_1|}(X + P). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por otro lado, notemos que el Hamiltoniano H puede escribirse en términos de los operadores A^+ y A^-. De hecho, esto es consecuencia de un teorema general [14]. Si un álgebra irreducible de operadores $\mathcal{A}$ es generada por los elementos $A_k^{\pm}$ $(k = 1, \ldots, n)$ tales que $[A_i^+, A_j^+] = [A_i^-, A_j^-] = 0$, $[A_i^+, A_j^-] = \gamma_i \delta_{(ij)}$ (sin suma) y donde $|\gamma_i| = 1$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, entonces, un operador H que pertenezca a $\mathcal{A}$ y que cumpla las relaciones de conmutación

$$[H, A_j^{\mp}] = \mp i \lambda_j A_j^{\pm}, \qquad \lambda_j \in \mathbb{C}, \tag{2.18}$$

se puede escribir como

$$H = \sum_{k=1}^{n} (-i) \left(\frac{\lambda_k}{\gamma_k} \right) A_k^+ A_k^- + g_0, \tag{2.19}$$

donde g_0 es un escalar y n es el número de dimensiones en las que está definido el Hamiltoniano.

Efectivamente, debido a las relaciones de conmutación 2.13 y 2.14, la diferencia entre H y la suma en el lado derecho de 2.19 conmuta con A_k^+ y A_k^-, para todo k, así como con sus funciones y por tanto, tiene que ser un c-número.

En nuestro caso tenemos $n = 1$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} g_0 &= H + i \left(\frac{i\sqrt{\epsilon}}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \right) A^+ A^- = H - \epsilon A^+ A^- \\ &= \frac{P^2}{2} + \epsilon \frac{X^2}{2} - \epsilon \frac{o_1 o_1^*}{2|o_1|^2} \Big(X - \frac{iP}{\sqrt{\epsilon}} \Big) \Big(X + \frac{iP}{\sqrt{\epsilon}} \Big), \end{aligned} \tag{2.20}$$

lo que nos lleva a $g_0 = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$, de modo que

$$H = \epsilon A^+ A^- + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}. \tag{2.21}$$

Vemos que, usando esta técnica matricial, podemos obtener fácilmente operadores de escalera para los eigenvectores de H. Una vez que tenemos estos operadores, definiremos los estados coherentes como los eigenestados del operador de aniquilación del sistema.

Analicemos ahora la evolución temporal correspondiente. En este caso, lo que nos interesa conocer es $|q(t)\rangle$, y tenemos que la ecuación de movimiento homogenea 2.2 se integra inmediatamente para quedar como

$$|q(t)\rangle = \exp\left(\mathbf{\Lambda}(t - t_0)\right)|q(t_0)\rangle. \tag{2.22}$$

Tomando por simplicidad $t_0 = 0$,

$$|q(t)\rangle = e^{\mathbf{\Lambda} t}|q(0)\rangle = e^{\mathbf{\Lambda} t}|q\rangle \tag{2.23}$$

Ahora, desarrollando la identidad como en la ecuación 2.8, pero para $|\tilde{u}^{\pm}\rangle$ y $\langle \tilde{e}^{\pm}|$ podemos escribir

$$\begin{aligned} |q(t)\rangle = e^{\mathbf{\Lambda} t}\mathbf{1}|q\rangle &= e^{\mathbf{\Lambda} t}\big(|\tilde{u}^+\rangle\langle\tilde{e}^+| + |\tilde{u}^-\rangle\langle\tilde{e}^-|\big)|q\rangle \\ &= \big(e^{\lambda_+ t}|\tilde{u}^+\rangle\langle\tilde{e}^+| + e^{\lambda_- t}|\tilde{u}^-\rangle\langle\tilde{e}^-|\big)|q\rangle \\ &= e^{i\sqrt{\epsilon}\,t}|\tilde{u}^+\rangle A^+ + e^{-i\sqrt{\epsilon}\,t}|\tilde{u}^-\rangle A^-. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Notemos entonces que, si $\epsilon = 1$, las exponenciales serán imaginarias, de modo que $|q(t)\rangle$ se mantiene oscilando a lo largo de los vectores $|\tilde{u}^+\rangle$ y $|\tilde{u}^-\rangle$, como era conocido para el oscilador atractivo. Sin embargo, si $\epsilon = -1$, las exponenciales serán reales y el segundo término crecerá infinitamente conforme t aumenta, esto es, la partícula sometida al potencial de oscilador repulsivo no puede ser confinada. Estos resultados surgen directamente de que, para el caso atractivo, los eigenvalores que obtenemos para $\mathbf{\Lambda}$ son imaginarios, mientras que para el oscilador repulsivo tales eigenvalores son reales. Veremos más adelante que esto se generaliza para cualquier Hamiltoniano cuadrático, es decir, obtendremos trayectorias confinadas sólo cuando los eigenvalores de la matriz $\mathbf{\Lambda}$, definida como se hizo en este ejemplo, son imaginarios (ver 3.2 y apéndice B).

2.2. Sistema bidimensional más simple

Para ilustrar que podemos obtener eigenvalores de la matriz $\mathbf{\Lambda}$ que no son necesariamente reales o imaginarios, analizaremos a continuación el Hamiltoniano bidimensional

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2} + \epsilon\frac{\vec{X}^{\,2}}{2} + \beta L_z, \tag{2.25}$$

donde $\epsilon = \pm 1$. Hamiltonianos de este tipo se encuentran al trabajar en sistemas de referencia no inerciales (ver, por ejemplo, [17] en donde aparecen estudios similares). Definimos ahora el vector

$$|q\rangle = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ P_x \\ P_y \end{pmatrix},$$

para obtener una ecuación similar a 2.2, pero ahora cuadridimensional, con la matriz $\mathbf{\Lambda}$ de la forma

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 1 \\ -\epsilon & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & -\epsilon & \beta & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

A partir de las eigenformas de esta matriz obtendremos, como en el caso anterior, los operadores de escalera del sistema. Para analizar este problema lo separaremos en el caso atractivo ($\epsilon = 1$) y el repulsivo ($\epsilon = -1$).

2.2.1. Caso atractivo

Para el primer caso tenemos que los dos términos del potencial son atractivos por lo que esperamos que el sistema se pueda confinar en el espacio. Resulta que los eigenvalores están dados por

$$\lambda = \pm i|1 \pm \beta|,$$

de modo que siempre tendremos eigenvalores imaginarios. Sin embargo, aún podemos tomar en cuenta tres casos, dependiendo del valor de β.

Para el caso en que $\beta < -1$, los eigenvalores estarán dados por

$$\begin{aligned} \lambda_1^+ &= -i(1+\beta), \qquad & \lambda_2^+ &= -i(\beta - 1), \\ \lambda_1^- &= (\lambda_1^+)^* = i(1+\beta), \qquad & \lambda_2^- &= (\lambda_2^+)^* = i(\beta - 1). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Entonces, los eigenvectores normalizados, según la ecuación

$$\langle e_k^\pm | u_k^\pm \rangle = 1, \qquad k = 1, 2, \tag{2.28}$$

serán

$$\begin{aligned} |u_1^+\rangle &= \frac{1}{4r_1}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad & |u_1^-\rangle &= \frac{1}{4r_1^*}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |u_2^+\rangle &= \frac{1}{4r_2}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad & |u_2^-\rangle &= \frac{1}{4r_2^*}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

con r_1 y r_2 constantes complejas. Los coeficientes se relacionaron exigiendo $|u_1^-\rangle = |u_1^+\rangle^*$ y $|u_2^-\rangle = |u_2^+\rangle^*$ puesto que $\lambda_1^- = (\lambda_1^+)^*$ y $\lambda_2^- = (\lambda_2^+)^*$.

Las correspondientes eigenformas se expresan como

$$\begin{aligned} \langle e_1^+| &= r_1\,(1, -i, i, 1)\,, \qquad & \langle e_1^-| &= r_1^*\,(1, i, -i, 1)\,, \\ \langle e_2^+| &= r_2\,(-1, i, i, 1)\,, \qquad & \langle e_2^-| &= r_2^*\,(-1, -i, -i, 1)\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ahora, los operadores $L_k^+ = \langle e_k^+|q\rangle$ y $L_k^- = \langle e_k^-|q\rangle$, serán de la forma

$$\begin{aligned} L_1^+ &= r_1(X - iY + iP_x + P_y), \quad & L_1^- &= r_1^*(X + iY - iP_x + P_y), \\ L_2^+ &= r_2(-X + iY + iP_x + P_y), \quad & L_2^- &= r_2^*(-X - iY - iP_x + P_y), \end{aligned} \tag{2.31}$$

cuyos conmutadores resultan

$$[L_1^-, L_1^+] = -4|r_1|^2, \qquad [L_2^-, L_2^+] = 4|r_2|^2. \tag{2.32}$$

Por lo tanto definiendo los nuevos eigenvectores y eigenformas como

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_k^\pm\rangle &= \sqrt{\left|[L_k^-, L_k^+]\right|}|u_k^\pm\rangle = 2|r_k||u_k^\pm\rangle, \\ \langle\tilde{e}_k^\pm| &= \frac{1}{\sqrt{\left|[L_k^-, L_k^+]\right|}}\langle e_k^\pm| = \frac{1}{2|r_k|}\langle e_k^\pm|, \qquad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.33}$$

tendremos los nuevos operadores $A_k^\pm = \langle\tilde{e}_k^\pm|q\rangle = \frac{L_k^\pm}{2|r_k|}$, los cuales cumplen las siguientes relaciones de conmutación con H,

$$[H, A_1^\pm] = \mp(1+\beta)A_1^\pm, \qquad [H, A_2^\pm] = \mp(\beta - 1)A_2^\pm. \tag{2.34}$$

Sin embargo, entre sí conmutan en la forma

$$[A_1^-, A_1^+] = -1 \equiv \gamma_1, \qquad [A_2^-, A_2^+] = 1 \equiv \gamma_2. \tag{2.35}$$

Como estamos considerando $\beta < -1$, tendremos que A_1^+ y A_2^+ son operadores de subida para los eigenvectores del Hamiltoniano, mientras que A_1^- y A_2^- actúan como operadores de bajada. Ahora, según el teorema expresado en la ecuación 2.19, podemos escribir

$$\begin{aligned} H &= (-i)\left(\frac{\lambda_1^+}{\gamma_1}A_1^+A_1^- + \frac{\lambda_2^+}{\gamma_2}A_2^+A_2^-\right) + g_0 \\ &= (-i)\left(\frac{-i(1+\beta)}{(-1)}A_1^+A_1^- + \frac{-i(-1+\beta)}{1}A_2^+A_2^-\right) + g_0 \\ &= (1+\beta)A_1^+A_1^- + (1-\beta)A_2^+A_2^- + g_0. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Un cálculo directo conduce a $g_0 = -\beta$. Notemos que el coeficiente de $A_1^+A_1^-$ es negativo mientras que el de $A_2^+A_2^-$ es positivo, de modo que nuestro Hamiltoniano no es definido positivo para $\beta < -1$.

Si tomamos ahora la región $-1 < \beta < 1$ tendremos los eigenvalores $\lambda_1^+ = i(1+\beta)$, $\lambda_2^+ = -i(\beta - 1)$ y sus complejos conjugados $\lambda_1^- = -i(1+\beta)$

y $\lambda_2^- = i(\beta - 1)$. Los eigenvectores respectivos, ya normalizados, serán

$$|u_1^+\rangle = \frac{1}{4r_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |u_1^-\rangle = \frac{1}{4r_1^*}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$|u_2^+\rangle = \frac{1}{4r_2}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |u_2^-\rangle = \frac{1}{4r_2^*}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

Las eigenformas correspondientes se expresan como

$$\begin{aligned} \langle e_1^+| = r_1\,(1, i, -i, 1)\,, \qquad \langle e_1^-| = r_1^*\,(1, -i, i, 1)\,, \\ \langle e_2^+| = r_2\,(-1, i, i, 1)\,, \qquad \langle e_2^-| = r_2^*\,(-1, -i, -i, 1)\,. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Entonces, definiendo los operadores $L_k^\pm = \langle e_k^\pm | q\rangle$ se obtiene

$$\begin{aligned} L_1^+ = r_1(X + iY - iP_x + P_y), \qquad L_1^- = r_1^*(X - iY + iP_x + P_y), \\ L_2^+ = r_2(-X + iY + iP_x + P_y), \qquad L_2^- = r_2^*(-X - iY - iP_x + P_y). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Estos operadores satisfacen

$$[L_1^-, L_1^+] = 4|r_1|^2, \qquad [L_2^-, L_2^+] = 4|r_2|^2. \tag{2.40}$$

De tal modo, definimos los nuevos eigenvectores y eigenformas como

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_k^\pm\rangle &= 2|r_k|\,|u_k^\pm\rangle \\ \langle \tilde{e}_k^\pm| &= \frac{1}{2|r_k|}\langle e_k^\pm|, \qquad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Así, $A_k^\pm = \langle \tilde{e}_k^\pm | q\rangle$ cumplen las relaciones de conmutación siguientes

$$[H, A_1^\pm] = \pm(1 + \beta)A_1^\pm, \quad [H, A_2^\pm] = \mp(\beta - 1)A_2^\pm. \tag{2.42}$$

Como $-1 < \beta < 1$, A_1^+ y A_2^+ actúan nuevamente como operadores de subida para los eigenvectores de H mientras que A_1^- y A_2^- serán operadores de bajada para estos estados.

Finalmente tendremos

$$[A_1^-, A_1^+] = 1 \equiv \gamma_1, \qquad [A_2^-, A_2^+] = 1 \equiv \gamma_2, \tag{2.43}$$

por lo que escribimos

$$H = (1+\beta)A_1^+A_1^- - (\beta-1)A_2^+A_2^- + g_0, \tag{2.44}$$

donde ahora $g_0 = 1$. Notemos que, en este caso, ambos coeficientes son positivos de modo que nuestro Hamiltoniano es definido positivo.

Por último, analicemos el caso en que $1 < \beta$, para el cual tenemos

$$\lambda_1^+ = i(1+\beta), \quad \lambda_2^+ = i(\beta-1), \quad \lambda_1^- = -i(1+\beta), \quad \lambda_2^- = -i(\beta-1). \tag{2.45}$$

Los eigenvectores normalizados son

$$\begin{aligned} |u_1^+\rangle &= \frac{1}{4r_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |u_1^-\rangle = \frac{1}{4r_1^*}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |u_2^+\rangle &= \frac{1}{4r_2}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |u_2^-\rangle = \frac{1}{4r_2^*}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Las eigenformas serán

$$\begin{aligned} \langle e_1^+| = r_1(1, i, -i, 1), \qquad \langle e_1^-| = r_1^*(1, -i, i, 1), \\ \langle e_2^+| = r_2(-1, -i, -i, 1), \qquad \langle e_2^-| = r_2^*(-1, i, i, 1). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Entonces, obtendremos los operadores $L_k^\pm = \langle e_k^\pm | q\rangle$ como

$$\begin{aligned} L_1^+ = r_1(X + iY - iP_x + P_y), \qquad L_1^- = r_1^*(X - iY + iP_x + P_y), \\ L_2^+ = r_2(-X - iY - iP_x + P_y), \qquad L_2^- = r_2^*(-X + iY + iP_x + P_y). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Por tanto,

$$[L_1^-, L_1^+] = 4|r_1|^2, \qquad [L_2^-, L_2^+] = -4|r_2|^2. \tag{2.49}$$

Tomamos ahora los nuevos eigenvectores y las eigenformas

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_k^\pm\rangle &= 2|r_k||u_k^\pm\rangle, \\ \langle \tilde{e}_k^\pm| &= \frac{1}{2|r_k|}\langle e_k^\pm|, \qquad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.50}$$

para definir los operadores $A_k^{\pm} = \langle \tilde{e}_k^{\pm} | q \rangle$, que cumplen

$$[H, A_1^{\pm}] = \pm(1+\beta) A_1^{\pm}, \qquad [H, A_2^{\pm}] = \pm(\beta - 1) A_2^{\pm}. \tag{2.51}$$

Esto significa que A_1^+, A_2^+ actúan como operadores de subida y A_1^-, A_2^- como operadores de bajada de los eigenvectores del Hamiltoniano H.

Notemos que,

$$\gamma_1 = 1, \qquad \gamma_2 = -1, \tag{2.52}$$

por lo que nuevamente H se expresa como

$$H \;=\; (1+\beta) A_1^+ A_1^- - (\beta - 1) A_2^+ A_2^- + g_0, \tag{2.53}$$

donde en este caso $g_0 = \beta$. Notemos que, nuevamente, nuestro Hamiltoniano no es definido positivo, debido al coeficiente del producto $A_2^+ A_2^-$.

2.2.2. Caso repulsivo

Aún nos resta analizar el Hamiltoniano 2.25 con $\epsilon = -1$. Para este caso, no se presentan eigenvalores puramente imaginarios tales que $\lambda_k^- = (\lambda_k^+)^*$, sino que tendremos

$$\lambda_1^+ = 1 + i\beta, \quad \lambda_2^+ = 1 - i\beta, \quad \lambda_1^- = -(1 + i\beta), \quad \lambda_2^- = -(1 - i\beta). \tag{2.54}$$

Por tanto

$$\lambda_1^+ = (\lambda_2^+)^*, \qquad \lambda_1^- = (\lambda_2^-)^*. \tag{2.55}$$

De hecho, siempre que $\beta \neq 0$, tendremos eigenvalores complejos.

Ahora, con la normalización definida anteriormente se llega a que los eigenvectores están dados por

$$\begin{aligned} |u_1^+\rangle &= \frac{1}{4s}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad & |u_1^-\rangle &= \frac{1}{4s_m}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |u_2^+\rangle &= \frac{1}{4s^*}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad & |u_2^-\rangle &= \frac{1}{4s_m^*}\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.56}$$

con s y s_m constantes complejas. Las eigenformas serán

$$\langle e_1^+| = s(-i, 1, -i, 1), \qquad \langle e_1^-| = s_m(-i, -1, i, 1),$$
$$\langle e_2^+| = s^*(i, 1, i, 1), \qquad \langle e_2^-| = s_m^*(i, -1, -i, 1), \tag{2.57}$$

las cuales conducen a los operadores

$$L_1^+ = s(-iX + Y - iP_x + P_y), \qquad L_1^- = s_m(-iX - Y + iP_x + P_y),$$
$$L_2^+ = s^*(iX + Y + iP_x + P_y), \qquad L_2^- = s_m^*(iX - Y - iP_x + P_y). \tag{2.58}$$

Obtenemos así los conmutadores

$$[L_1^-, L_1^+] = -4iss_m = -4irr_m e^{i(\theta+\theta_m)},$$
$$[L_2^-, L_2^+] = -4is^*s_m^* = -4irr_m e^{-i(\theta+\theta_m)},$$

donde tomamos $s = re^{i\theta}$ y $s_m = r_m e^{i\theta_m}$. Por tanto

$$\Big|[L_1^-, L_1^+]\Big| = 4rr_m \qquad \Big|[L_2^-, L_2^+]\Big| = 4rr_m. \tag{2.59}$$

Definimos entonces nuevos eigenvectores y eigenformas como

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_k^\pm\rangle &= 2\sqrt{rr_m}\,|u_k^\pm\rangle, \\ \langle\tilde{e}_k^\pm| &= \frac{1}{2\sqrt{rr_m}}\langle e_k^\pm|, \qquad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Así, los nuevos operadores $A_k^\pm$ tendrán la forma

$$A_1^+ = \frac{e^{i\theta}\sqrt{r}}{2\sqrt{r_m}}[-i(X + P_x) + (Y + P_y)], \quad A_1^- = \frac{e^{i\theta_m}\sqrt{r_m}}{2\sqrt{r}}[-i(X - P_x) - (Y - P_y)],$$
$$A_2^+ = \frac{e^{-i\theta}\sqrt{r}}{2\sqrt{r_m}}[i(X + P_x) + (Y + P_y)], \quad A_2^- = \frac{e^{-i\theta_m}\sqrt{r_m}}{2\sqrt{r}}[i(X - P_x) - (Y - P_y)],$$

donde vemos que $A_1^+ = (A_2^+)^\dagger$ y $A_1^- = (A_2^-)^\dagger$. Además, se cumplen las relaciones de conmutación

$$[H, A_1^\pm] = \mp(i - \beta)A_1^\pm, \qquad [H, A_2^\pm] = \mp(i + \beta)A_2^\pm. \tag{2.61}$$

En este caso, no es correcto decir que los operadores $A_k^\pm$, $k = 1, 2$ son operadores de escalera para los eigenvectores de la energia, puesto que añadirían números complejos a los eigenvalores que en principio tenemos definidos como reales.

Por otro lado tenemos

$$\gamma_1 \equiv [A_1^-, A_1^+] = -ie^{i\Theta}, \qquad \gamma_2 \equiv [A_2^-, A_2^+] = -ie^{-i\Theta}, \tag{2.62}$$

donde $\Theta = \theta + \theta_m$. Notemos que en este caso, a diferencia de los anteriores, los valores de γ_1 y γ_2 dependen de las constantes s y s_m. De hecho, dependen solamente de la suma Θ de las fases θ y θ_m. Esto es debido a que los eigenvalores que se obtuvieron para $\mathbf{\Lambda}$ son números complejos con parte real distinta de cero. Sin embargo, aún podemos seguir la técnica matricial que hemos empleado en los casos anteriores para escribir

$$H = e^{-i\Theta}(1 + i\beta)A_1^+ A_1^- + e^{i\Theta}(1 - i\beta)A_2^+ A_2^- - i. \tag{2.63}$$

Notemos que en este caso $g_0 = -i$.

A continuación, trataremos de llevar el Hamiltoniano a una forma similar a la del oscilador armónico. Primero definamos los operadores F^+, G^+, F^- y G^-, como

$$\begin{aligned} F^+ &= \frac{A_1^+ + (A_1^+)^\dagger}{\sqrt{2}}, \qquad G^+ = \frac{A_1^+ - (A_1^+)^\dagger}{i\sqrt{2}}, \\ F^- &= \frac{A_1^- + (A_1^-)^\dagger}{\sqrt{2}}, \qquad G^- = \frac{A_1^- - (A_1^-)^\dagger}{i\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Explícitamente tendremos

$$\begin{aligned} F^+ &= \sqrt{\frac{r}{2r_m}}\Big[(X + P_x)\sin\theta + (Y + P_y)\cos\theta\Big], \\ G^+ &= \sqrt{\frac{r}{2r_m}}\Big[-(X + P_x)\cos\theta + (Y + P_y)\sin\theta\Big], \\ F^- &= \sqrt{\frac{r_m}{2r}}\Big[(X - P_x)\sin\theta_m - (Y - P_y)\cos\theta_m\Big], \\ G^- &= \sqrt{\frac{r_m}{2r}}\Big[-(X - P_x)\cos\theta_m - (Y - P_y)\sin\theta_m\Big]. \end{aligned} \tag{2.65}$$

De ésto puede verse que F^+, F^-, G^+ y G^- son hermitianos, lo que también puede comprobarse directamente de la definición.

Entonces, podemos escribir H como

$$\begin{aligned}
H &= e^{-i\Theta}(1+i\beta)\left(\frac{F^+ + iG^+}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{F^- + iG^-}{\sqrt{2}}\right) \\
&\quad + e^{i\Theta}(1-i\beta)\left(\frac{F^+ - iG^+}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{F^- - iG^-}{\sqrt{2}}\right) - i \\
&= (F^+F^- - G^+G^-)\cos\Theta + (F^+G^- + G^+F^-)\sin\Theta \\
&\quad + \beta\big[(F^+F^- - G^+G^-)\sin\Theta - (F^+G^- + G^+F^-)\cos\Theta\big] - i.
\end{aligned}$$

Ahora, como $A_k^{\pm}$ conmuta con $A_j^{\mp}$ siempre que $k \neq j$, podemos calcular los conmutadores

$$\begin{aligned}
[F^+, F^-] &= i\cos\Theta, & [G^+, G^-] &= -i\cos\Theta, \\
[F^+, G^+] &= 0, & [F^-, G^-] &= 0, \\
[F^+, G^-] &= i\sin\Theta, & [F^-, G^+] &= -i\sin\Theta.
\end{aligned}$$

Si definimos ahora los operadores

$$\begin{aligned}
G_1 &= (F^+F^- - G^+G^-)\cos\Theta + (F^+G^- + G^+F^-)\sin\Theta, \\
G_2 &= (F^+F^- - G^+G^-)\sin\Theta - (F^+G^- + G^+F^-)\cos\Theta,
\end{aligned} \tag{2.66}$$

es fácil ver que, como $(F^+F^- - G^+G^-)$ y $(F^+G^- + G^+F^-)$ conmutan, también lo harán G_1 y G_2. Así, podemos escribir el Hamiltoniano como una suma de operadores que conmutan

$$H = G_1 + \beta G_2 - i. \tag{2.67}$$

Sin embargo, tenemos que

$$\begin{aligned}
F^+F^- - G^+G^- &= \tfrac{(F^+ + F^-)^2 - (F^+ - F^-)^2 - (G^+ + G^-)^2 + (G^+ - G^-)^2}{4} + i\cos\Theta, \\
F^+G^- + G^+F^- &= \tfrac{(F^+ + G^-)^2 - (F^+ - G^-)^2 + (G^+ + F^-)^2 - (G^+ - F^-)^2}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\Theta,
\end{aligned} \tag{2.68}$$

y

$$
\begin{aligned}
[F^+ + F^-, F^+ - F^-] &= -2i\cos\Theta, \\
[F^+ + F^-, G^+ + G^-] &= 0, \\
[F^+ + F^-, G^+ - G^-] &= -2i\sin\Theta, \\
[F^+ - F^-, G^+ + G^-] &= 2i\sin\Theta, \\
[F^+ - F^-, G^+ - G^-] &= 0, \\
[G^+ + G^-, G^+ - G^-] &= 2i\cos\Theta, \\
[F^+ + G^-, F^+ - G^-] &= -2i\sin\Theta, \\
[F^+ + G^-, G^+ + F^-] &= 2i\cos\Theta, \\
[F^+ + G^-, G^+ - F^-] &= 0, \\
[F^+ - G^-, G^+ + F^-] &= 0, \\
[F^+ - G^-, G^+ - F^-] &= -2i\cos\Theta, \\
[G^+ + F^-, G^+ - F^-] &= -2i\sin\Theta.
\end{aligned}
$$

Ahora, tomemos por ejemplo el caso en que $\Theta = 0$ de modo que $\cos\Theta = 1$ y $\sin\Theta = 0$, por lo que tendremos

$$
\begin{aligned}
[F^+ + F^-, F^+ - F^-] &= -2i, \\
[G^+ + G^-, G^+ - G^-] &= 2i, \\
[F^+ + G^-, G^+ + F^-] &= 2i, \\
[F^+ - G^-, G^+ - F^-] &= -2i,
\end{aligned}
$$

mientras que los otros conmutadores se hacen cero. Entonces podemos denotar

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F^+ - F^-), \qquad P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(F^+ + F^-), \\
X_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(G^+ + G^-), \qquad P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^+ - G^-), \\
X_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F^+ + G^-), \qquad P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^+ + F^-), \\
X_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(G^+ - F^-), \qquad P_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(F^+ - G^-).
\end{aligned}
$$

Notemos que los operadores X_k y P_k, $k = 1, 2, 3, 4$ también son hermitianos.

Así, G_1 y G_2 tendrán la forma

$$G_1 = \frac{1}{2}\Big[P_1^2 - X_1^2 + P_2^2 - X_2^2\Big] + i,$$
$$G_2 = -\frac{1}{2}\Big[P_3^2 + X_3^2 - P_4^2 - X_4^2\Big],$$

que podemos escribir como

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2}\Big[(P_1 - X_1)(P_1 + X_1) + (P_2 - X_2)(P_2 + X_2)\Big] + 2i, \\ G_2 &= -\frac{1}{2}\Big[(X_3 - iP_3)(X_3 + iP_3) - (X_4 - iP_4)(X_4 + iP_4)\Big], \end{aligned} \tag{2.69}$$

o

$$\begin{aligned} G_1 &= -B_1^- B_1^+ - B_2^- B_2^+ + 2i, \\ G_2 &= -B_3^\dagger B_3 + B_4^\dagger B_4, \end{aligned} \tag{2.70}$$

donde

$$\begin{aligned} B_1^+ &= \frac{X_1 + P_1}{\sqrt{2}}, \qquad B_1^- = \frac{X_1 - P_1}{\sqrt{2}}, \\ B_2^+ &= \frac{X_2 + P_2}{\sqrt{2}}, \qquad B_2^- = \frac{X_2 - P_2}{\sqrt{2}}, \\ B_3 &= \frac{X_3 + iP_3}{\sqrt{2}}, \qquad B_4 = \frac{X_4 + iP_4}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Vemos que resultan expresiones similares a las obtenidas en el primer ejemplo: B_3 y B_4 tienen la forma que encontramos en el oscilador armónico atractivo, que se puede observar en las ecuaciones 2.16. Sin embargo, $B_1^\pm$ y $B_2^\pm$ tienen la forma de los operadores encontrados en el caso repulsivo de la ecuación 2.17, en la que el cociente de los coeficientes de los operadores X_i y P_i, $i = 1, 2$, son ambos reales. Finalmente, el Hamiltoniano tomará la forma

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{P}^2}{2} - \frac{\vec{X}^{\,2}}{2} + \beta L_z \\ &= -B_1^- B_1^+ - B_2^- B_2^+ - \beta\big(B_3^\dagger B_3 - B_4^\dagger B_4\big) + i. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Vemos que los primeros términos de H corresponden a un oscilador bidimensional repulsivo, mientras que el término que está multiplicado por β a un oscilador bidimensional atractivo. Esto concuerda con las similitudes que hallamos entre los operadores $B's$ y las ecuaciones 2.16 y 2.17.

Es fácil comprobar que, al menos para los valores de $\Theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π, G_1 y G_2 conservan la misma estructura del Hamiltoniano de oscilador bidimensional, repulsivo y atractivo respectivamente que se observa en este caso.

Capítulo 3

Hamiltonianos cuadráticos tridimensionales con simetría axial

En los ejemplos anteriores hemos trabajado con Hamiltonianos que pueden ahora generalizarse a la forma

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2} + b_0 L_z + \frac{1}{2} b_0^2 (X^2 + Y^2) + V(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z^2). \tag{3.1}$$

Estos Hamiltonianos aparecen al considerar, en unidades adimensionales ($\hbar = m = 1$), una partícula cargada sin espín dentro de un campo magnético homogeneo constante a lo largo del eje z y bajo la acción de un potencial cuadrático con simetría axial alrededor del campo. La forma más general de un potencial cuadrático, simétrico alrededor de z, está dado por

$$V(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z^2) = \frac{v_0}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{v_1}{2} Z^2, \tag{3.2}$$

con v_0 y v_1 constantes reales. Así, en este caso la matriz $\mathbf{\Lambda}$ tal que $\big[iH, |q\rangle\big] = \mathbf{\Lambda}|q\rangle$, será

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -b_0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(b_0^2 + v_0) & 0 & 0 & 0 & -b_0 & 0 \\ 0 & -(b_0^2 + v_0) & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

La ecuación característica, $|\mathbf{\Lambda} - \lambda \mathbf{1}| = 0$, estará dada por el polinomio

$$D_{\mathbf{\Lambda}}(\lambda) = \lambda^6 + C_1\lambda^4 + C_2\lambda^2 + C_3, \tag{3.4}$$

donde

$$\begin{aligned} C_1 &= 4b_0^2 + 2v_0 + v_1, \\ C_2 &= v_0^2 + 4b_0^2 v_1 + 2v_0 v_1, \\ C_3 &= v_0^2 v_1. \end{aligned}$$

Se puede mostrar en general que, para un Hamiltoniano cuadrático arbitrario, no necesariamente con simetría axial como en nuestro caso, la ecuación característica de la matriz $\mathbf{\Lambda}$ estará dada siempre por un polinomio con puras potencias pares en λ (ver apéndice B).

3.1. Análisis de los eigenvalores complejos para la matriz $\mathbf{\Lambda}$

Debemos ahora notar que las características de los ejemplos anteriores varían, debido principalmente al tipo de eigenvalores de la matriz $\mathbf{\Lambda}$. Estos valores se obtienen del polinomio característico de sexto grado en λ dado en la ecuación 3.4, el cual contiene sólo potencias pares y por tanto podemos reescribir como

$$D_{\mathbf{\Lambda}}(\sigma) = \sigma^3 + C_1\sigma^2 + C_2\sigma + C_3$$

con $\sigma = \lambda^2$. Así, tendremos 6 eigenvalores de la forma $\lambda = \pm\sqrt{\sigma}$, que denotaremos como

$$\lambda_k, \; -\lambda_k \;\text{ con } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \;\text{ ó }\; \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0 \text{ y } \operatorname{Im}(\lambda_k) > 0 \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.5}$$

Ya que σ es raíz de un polinomio de tercer grado con coeficientes reales, σ puede ser real o compleja dependiendo de las relaciones entre los valores de las costantes C_1, C_2 y C_3 [15]. Para el caso en que las tres σ's sean reales y negativas, tendremos seis eigenvalores imaginarios para la matriz $\mathbf{\Lambda}$ lo cual conduce a tres osciladores armónicos atractivos desacoplados del tipo del primer ejemplo. En estos casos se puede mostrar (ver [14],[16], [17] y apéndice B) que el comportamiento de la partícula será acotado, es decir, una partícula bajo este tipo de Hamiltonianos quedará confinada. Sin embargo, si tenemos que algún valor de σ es real pero positivo, lo cual generaría dos valores reales de λ, se tendrá un movimiento desconfinado y, eventualmente, la partícula escapará del potencial. Existe, sin embargo, un último caso en el que dos σ's son complejas conjugados entre sí, con parte real distinta de cero. En este caso tendremos una combinación de movimientos acotados y desacotados en diferentes direcciones y, así, el movimiento general será desacotado, con la partícula escapando del potencial .

Si λ_1, λ_2 y λ_3 son todos distintos podemos hallar los vectores y formas propias de $\mathbf{\Lambda}$. Si algunos de los λ's son iguales, debemos recurrir al método de vectores de Jordan para encontrar eigenvectores y eigenformas independientes [14], [18]. Además, se demuestra (ver apéndice A) que si

$$\mathbf{\Lambda}|u_j^\pm\rangle = \pm\lambda_j|u_j^\pm\rangle, \qquad \langle e_k^\pm|\mathbf{\Lambda} = \pm\lambda_k\langle e_k^\pm| \tag{3.6}$$

podemos normalizar en la forma

$$\langle e_i^r|u_j^{r'}\rangle = \delta_{ij}\delta_{rr'}, \tag{3.7}$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ y $r, r' = +, -$, de tal modo que

$$\sum_{i=1}^{3}(|u_i^+\rangle\langle e_i^+| + |u_i^-\rangle\langle e_i^-|) = \mathbf{1}. \tag{3.8}$$

Similarmente a lo que hicimos en el capítulo anterior, se pueden obtener los operadores $L_k^\pm = \langle e_k^\pm|q\rangle$ que, por definición, cumplen

$$[H, L_k^\pm] = \mp i\lambda_k L_k^\pm. \tag{3.9}$$

Además, podemos mostrar que

$$\begin{gathered}[L_k^+, L_j^+] = 0 = [L_k^-, L_j^-],\\ [L_k^+, L_j^-] = 0, \qquad k \neq j,\end{gathered}$$

mientras que

$$[L_k^-, L_k^+] \neq 0.$$

De hecho, si algún conmutador $[L_k^-, L_k^+]$ fuera cero, el correspondiente L_k conmutaría con todos los operadores L_j^- y L_j^+ $(j = 1, 2, 3)$. Como las eigenformas $\langle e_j^-|$, $\langle e_j^+|$ forman una base del conjunto de formas con 6 componentes $\langle\xi|$, L_k conmutaría con cualquier combinación lineal $\langle\xi|q\rangle$. Por tanto, podría conmutar con cualquier observable canónica q_j, lo cual es imposible ya que $\langle e_k| \neq 0$, [14].

Si definimos nuevos eigenvectores y eigenformas de $\mathbf{\Lambda}$ como

$$|\tilde{u}_k^{\pm}\rangle = |[L_k^-, L_k^+]|^{1/2}|u_k^{\pm}\rangle \qquad \langle\tilde{e}_k^{\pm}| = \frac{\langle e_k^{\pm}|}{|[L_k^-, L_k^+]|^{1/2}} \tag{3.10}$$

los operadores $A_k^{\pm} = \langle\tilde{e}_k^{\pm}|q\rangle$ cumplen ahora que

$$[A_k^-, A_j^+] = \frac{[L_k^-, L_j^+]}{|[L_k^-, L_k^+]|^{1/2}|[L_j^-, L_j^+]|^{1/2}} = \frac{[L_k^-, L_k^+]}{|[L_k^-, L_k^+]|}\delta_{kj} = \gamma_k\delta_{(kj)}, \tag{3.11}$$

donde γ_k es un número complejo de módulo uno. Además, se siguen cumpliendo las relaciones de conmutación

$$[A_k^+, A_j^+] = 0 = [A_k^-, A_j^-], \tag{3.12}$$

$$[H, A_k^{\pm}] = \mp i\lambda_k A_k^{\pm}. \tag{3.13}$$

Ahora, si definimos $\alpha_k = -i\lambda_k$ así que $[H, A_k^{\pm}] = \pm\alpha_k A_k^{\pm}$, vemos que A_k^+ y A_k^- actuando sobre los eigenvectores de H aumentan y disminuyen, respectivamente, los valores propios correspondientes en una cantidad igual a α_k, es decir, actúan como operadores de subida y bajada. Debemos notar que, en el caso en que α_k no es real, lo anterior conduciría a que los eigenvalores de H serían complejos, lo cual no puede ocurrir ya que H es hermitiano. Esto significa que no existen eigenestados normalizables de H en este caso.

Una consecuencia de las relaciones de conmutación anteriores es que H se puede escribir como [14] (ver también la discusión relacionada con las ecuaciones 2.18 y 2.19)

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\alpha_k}{\gamma_k}A_k^+A_k^- + g_0 \\ &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\alpha_k}{[L_k^-, L_k^+]}L_k^+L_k^- + g_0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde g_0 es un escalar complejo. De hecho, definamos

$$g_0 = H - \sum_{k=1}^{3}\frac{\alpha_k}{\gamma_k}A_k^+A_k^-.$$

Entonces, debido a las relaciones 3.11 y 3.12, g_0 conmuta con todos los operadores $A_j^{\pm}$. Por tanto, g_0 conmuta con todas las componentes del vector $|q\rangle$, de modo que $g_0 \in \mathbb{C}$.

3.2. Eigenvalores puramente imaginarios

Según nuestra notación

$$\langle e_k^+|\mathbf{\Lambda} = \lambda_k \langle e_k^+|, \qquad \langle e_k^-|\mathbf{\Lambda} = -\lambda_k \langle e_k^-|, \tag{3.15}$$

por lo que, si $\lambda_j = i\omega_j$ con $\omega_j \in \mathbb{R}^+$ para $j = 1, 2, 3$, entonces $\lambda_k^* = -\lambda_k$ y, como la matriz $\mathbf{\Lambda}$ es real, tendremos

$$\langle e_k^-| \propto \langle e_k^+|^*.$$

Así, sin pérdida de generalidad podemos fijar

$$\langle e_k^-| = \langle e_k^+|^*. \tag{3.16}$$

Ahora, como $A_k^\pm$ son combinaciones lineales de las componentes de $|q\rangle$, (X, $Y, \ldots,$ $P_x, P_y, \ldots$), que son operadores hermitianos, entonces

$$(A_k^+)^\dagger = (\langle e_k^+|q\rangle)^\dagger = \langle e_k^-|q\rangle = A_k^-. \tag{3.17}$$

Notemos además que

$$\begin{aligned} \gamma_k^\dagger = [A_k^-, A_k^+]^\dagger &= (A_k^- A_k^+ - A_k^+ A_k^-)^\dagger \\ &= A_k^- A_k^+ - A_k^+ A_k^- = [A_k^-, A_k^+] = \gamma_k, \end{aligned}$$

es decir, γ_k es real y como su módulo es uno tenemos que $\gamma_k = \pm 1$.

Finalmente, tendremos también que

$$[H, A_k^\pm] = \mp i \lambda_k A_k^\pm = \mp i(i\omega_k) A_k^\pm = \pm \omega_k A_k^\pm. \tag{3.18}$$

Por tanto, en este caso los operadores de subida y bajada $A_k^\pm$ aumentan o disminuyen el eigenvalor del Hamiltoniano H en una cantidad real ω_k, un caso particular del general presentado anteriormente.

Además, H se escribirá como

$$H = \sum_{k=1}^{3} \frac{\omega_k}{\gamma_k} A_k^+ A_k^- + g_0 \tag{3.19}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\omega_k}{[L_k^-, L_k^+]} L_k^+ L_k^- + g_0, \tag{3.20}$$

de modo que, si γ_k es positivo para todos los valores de k, entonces H será un operador definido positivo. Así, existirá un estado base con eigenvalor mínimo, $|\psi_0\rangle$, tal que $A_k^-|\psi_0\rangle = 0$ para todo k. Sin embargo, si existe algún k entre los valores 1,2,3, para el cual γ_k es negativo, el operador H no será definido positivo, ya que habrá términos del tipo de oscilador "invertido"[17]. En este caso, en vez de un estado base tendremos un estado extremal, también denotado $|\psi_0\rangle$, tal que $A_k^+|\psi_0\rangle = 0$ mientras que $A_j^-|\psi_0\rangle = 0$ para $j \neq k$. A partir de $|\psi_0\rangle$ se generará una sucesión infinita de niveles espectrales negativos y positivos conforme se aplican los operadores A_k^- y A_j^+.

Capítulo 4

Estados coherentes para los Hamiltonianos tridimensionales

En el capítulo anterior demostramos que podemos escribir así el Hamiltoniano cuadrático tridimensional dado en las ecuaciones 3.1, 3.2

$$H = \sum_{k=1}^{3} \frac{\alpha_k}{\gamma_k} A_k^+ A_k^- + g_0, \tag{4.1}$$

donde A_k^+ y A_k^- son operadores que cumplen las relaciones de conmutación 3.11, 3.12 y 3.13. Por la relación 3.12 podemos definir al producto entre A_k^+ y A_k^-, ordenado convenientemente, como el Hamiltoniano parcial H_k a modo de obtener el Hamiltoniano total 3.1 como suma de operadores que conmutan entre sí y con H.

Para definir concretamente los operadores H_k, vamos a restringirnos al caso en que todos los eigenvalores de la matriz $\mathbf{\Lambda}$ son imaginarios puros ($\lambda_j = i\omega_j$, con $\omega_j \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2, 3$). De este modo, serán válidos los resultados de la sección 3.2, en particular, tendremos que $A_k^- = (A_k^+)^\dagger$ para $k = 1, 2, 3$. Así, podemos definir un nuevo operador B_k en términos de A_k^+ o A_k^- para intentar agrupar los dos valores posibles de γ_k. Sean por tanto

$$\begin{array}{llllll} B_k = A_k^-, & B_k^\dagger = A_k^+, & \text{para} & \gamma_k & = & 1, \\ B_k = A_k^+, & B_k^\dagger = A_k^-, & \text{para} & \gamma_k & = & -1, \end{array} \tag{4.2}$$

con $k = 1, 2, 3$. Entonces, por la ecuación 3.11 tendremos que los operadores B_k y $B_k^\dagger$ cumplen las relaciones de conmutación

$$[B_j, B_k^\dagger] = \delta_{jk}, \qquad j, k = 1, 2, 3. \tag{4.3}$$

Mientras tanto, las ecuaciones 3.12 nos llevan a

$$[B_j, B_k] = [B_j^\dagger, B_k^\dagger] = 0, \qquad j, k = 1, 2, 3. \tag{4.4}$$

Vamos ahora a escribir el Hamiltoniano total en términos de los operadores B_k y $B_k^\dagger$. Si en la expresión 3.19 sustituimos B_k y $B_k^\dagger$, según las definiciones 4.2, y usamos las relaciones de conmutación 4.3 para ordenar los productos apropiadamente cuando $\gamma_j = -1$ obtenemos

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \omega_k B_k^\dagger B_k - \tilde{\sum_j} \omega_j + g_0 \\ &= \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \omega_k B_k^\dagger B_k + g_0', \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde denotamos como g_0' a $g_0 - \tilde{\sum}_j \omega_j$ y $\tilde{\sum}_j$ representa la suma sobre todos los términos para los que $\gamma_j = -1$.

Los operadores H_k propuestos anteriormente, quedarán definidos como

$$H_k = \gamma_k \omega_k B_k^\dagger B_k, \tag{4.6}$$

de modo que $H = H_1 + H_2 + H_3 + g_0'$. Recordemos que una observable, como lo es H, es un operador hermitiano cuyo conjunto de eigenvectores forman una base del espacio de estados físicos. Ya que los operadores H_k conmutan con H y son hermitianos, podemos buscar un conjunto completo de eigenestados comunes de H y H_k, $k = 1, 2, 3$.

Analicemos otra vez cada caso por separado. Si $\gamma_k = 1$, el operador H_k será definido positivo, es decir, sus eigenvalores deben ser mayores o iguales a cero. Por la ecuación 3.18, tendremos que $[H_k, A_k^\pm] = \pm\omega_k A_k^\pm$, de modo que A^- disminuye los eigenvalores de H_k en una cantidad igual a ω_k. Entonces debe existir un vector $|\psi_{0_k}\rangle$, tal que $A_k^-|\psi_{0_k}\rangle = 0$, es decir, un vector base para este operador con el eigenvalor mínimo posible.

Por otro lado, si $\gamma_k = -1$, el operador H_k será definido negativo. Por el conmutador anterior, que sigue siendo válido en este caso, deberemos tener un eigenestado cumbre de H_k, con el eigenvalor más alto posible. Tal eigenestado, $|\psi_{0_k}\rangle$, debe ser aniquilado por el operador A_k^+, $A_k^+|\psi_{0_k}\rangle = 0$. Por tanto, independientemente del valor de γ_k, existirá un eigenvector de H_k, $|\psi_{0_k}\rangle$, al que llamaremos estado extremal, tal que

$$B_k|\psi_{0_k}\rangle = 0, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{4.7}$$

De hecho, la existencia de una función $|\psi_0\rangle$ que es solución simultánea de las tres ecuaciones anteriores está garantizada por un lema casi inmediato en el formalismo del espacio de Hilbert, cuya demostración se desarrolla de manera didactica en el apéndice C. Por ahora, sólo mencionaremos que si los operadores B_1, B_2 y B_3 obedecen las relaciones de conmutación dadas por 4.3 y 4.4, el sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales

$$B_j|\psi_0\rangle = 0, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{4.8}$$

tiene la solución cuadrado integrable dada por

$$\langle x|\psi_0\rangle = \psi_0(\vec{x}) = ce^{-\frac{1}{2}a_{ij}x_ix_j} = ce^{-\frac{1}{2}(\vec{x}\ ^T\mathbf{a}\vec{x})}. \tag{4.9}$$

La matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ es simétrica y sus entradas complejas quedan determinadas por el sistema de ecuaciones 4.8, el cual conduce a

$$\mathbf{a}\vec{\alpha_j} = \vec{\beta_j}, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{4.10}$$

$\vec{\alpha_j}$ y $\vec{\beta_j}$ resultan de expresar los operadores B_j y $B_j^\dagger$ como

$$B_j = i\ \vec{P}\cdot\vec{\alpha_j} + \vec{X}\cdot\vec{\beta_j}, \qquad B_j^\dagger = -i\ \vec{\alpha_j}^\dagger\cdot\vec{P} + \vec{\beta_j}^\dagger\cdot\vec{X}, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{4.11}$$

Notemos que, debido a la ecuación 4.5, la acción de H sobre el estado extremal $|\psi_0\rangle$ es de la forma

$$H|\psi_0\rangle = g_0'|\psi_0\rangle, \tag{4.12}$$

es decir, $|\psi_0\rangle$ es un eigenestado de H con eigenvalor g_0'.

4.1. Derivación de los estados coherentes $|z_k\rangle$

Por ahora, será suficiente trabajar con los operadores B_k y $B_k^\dagger$ para seguir el desarrollo usual de los estados coherentes como eigenestados del operador de aniquilación B_k del modo k-ésimo. Posteriormente generalizaremos la técnica para obtener los estados correspondientes en el espacio total.

Definimos primero los operadores número en términos de B_k y $B_k^\dagger$ como $N_k = B_k^\dagger B_k$. Notemos que, por definición, el estado $|\psi_0\rangle$ es eigenvector de N_k con eigenvalor cero. Entonces, si denotamos como $|n_k\rangle$ a los eigenvectores normalizados de N_k tales que $N_k|n_k\rangle = n_k|n_k\rangle$ podemos escoger, ya que $|\psi_0\rangle$ está también normalizado,

$$|\psi_0\rangle = |0_k\rangle. \tag{4.13}$$

Por otro lado

$$[N_k, B_k^\dagger] = B_k^\dagger,$$

entonces

$$N_k B_k^\dagger |0_k\rangle = B_k^\dagger |0_k\rangle, \tag{4.14}$$

ésto es, $B_k^\dagger|0_k\rangle$ es eigenvector de N_k con eigenvalor uno, $B_k^\dagger|0_k\rangle \propto |1_k\rangle$. La normalización $\langle 1_k|1_k\rangle = 1$ nos lleva a que $|1_k\rangle = B_k^\dagger|0_k\rangle$. Continuando el proceso, en general se tiene que $|n_k + 1\rangle = C(n_k)B_k^\dagger|n_k\rangle$, donde $C(n_k)$ es un número complejo. Normalizando tenemos $|C(n_k)|^2 = \frac{1}{n_k+1}$ así que, tomando $C(n_k)$ como una costante positiva, tendremos

$$B_k^\dagger|n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1}|n_k + 1\rangle. \tag{4.15}$$

Por tanto, el operador $B_k^\dagger$ es operador de creación para los eigenestados del operador número correspondiente N_k. Una aplicación sucesiva del operador $B_k^\dagger$ sobre el estado extremal produce cualquier eigenvector de N_k, de modo que

$$|n_k\rangle = \frac{(B_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}|0_k\rangle. \tag{4.16}$$

Además, se tiene que $[N_k, B_k] = -B_k$, por lo que $N_k B_k|n_k\rangle = (n_k - 1)B_k|n_k\rangle$, es decir, $B_k|n_k\rangle$ es eigenvector de N_k con eigenvalor $n_k - 1$. Normalizando se obtiene que

$$B_k|n_k\rangle = \sqrt{n_k}|n_k - 1\rangle. \tag{4.17}$$

Entonces, B_k es operador de aniquilación para los eigenestados $|n_k\rangle$ de N_k.

Notemos sin embargo que, para $j \neq k$,

$$B_j|n_k\rangle = \frac{(B_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}B_j|0_k\rangle = \frac{(B_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}B_j|\psi_0\rangle = 0, \tag{4.18}$$

es decir, $|n_k\rangle$ sigue siendo eigenvector de B_j con eigenvalor cero, siempre que $k \neq j$. Podemos considerar por tanto que $|\psi_0\rangle = |\psi_{0,0,0}\rangle$ y tendremos, por ejemplo

$$|n_1\rangle = |\psi_{n_1,0,0}\rangle = \frac{(B_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}|\psi_{0,0,0}\rangle. \tag{4.19}$$

En general obtenemos

$$|n_1, n_2, n_3\rangle \equiv |\psi_{n_1,n_2,n_3}\rangle = \frac{(B_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(B_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \frac{(B_3^\dagger)^{n_3}}{\sqrt{n_3!}} |\psi_{0,0,0}\rangle. \tag{4.20}$$

Conservaremos por simplicidad la notación $|n_k\rangle$ mientras no cause conflictos.

Ahora, ya que los operadores H_k son observables y N_k es proporcional a H_k, tenemos que los eigenestados $\{|n_k\rangle\}$ forman una base del espacio de estados. Entonces, podemos expresar cualquier vector como una combinación lineal de ellos. En particular, los eigenestados del operador B_k, que denotaremos como $|z_k\rangle$, pueden escribirse como

$$|z_k\rangle = \sum_{n_k=0}^{\infty} C_{n_k}(z_k)|n_k\rangle, \tag{4.21}$$

donde $C_{n_k}(z_k)$ son coeficientes complejos que se obtienen exigiendo que se cumpla

$$B_k|z_k\rangle = z_k|z_k\rangle \tag{4.22}$$

para z_k complejo. Tenemos así que

$$\begin{aligned} B_k|z_k\rangle &= \sum_{n_k=0}^{\infty} C_{n_k}(z_k)B_k|n_k\rangle = \sum_{n_k=0}^{\infty} C_{n_k}(z_k)\sqrt{n_k}\,|n_k-1\rangle \\ &= z_k\sum_{n_k=0}^{\infty} C_{n_k}(z_k)|n_k\rangle = z_k\sum_{n_k=1}^{\infty} C_{n_k-1}(z_k)|n_k-1\rangle. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Por tanto, se obtiene la relación de recurrencia

$$C_{n_k}(z_k) = \frac{z_k}{\sqrt{n_k}} C_{n_k-1}(z_k) \qquad \Rightarrow \qquad C_{n_k}(z_k) = \frac{(z_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} C_{0_k}(z_k). \tag{4.24}$$

Entonces podemos escribir

$$|z_k\rangle = C_{0_k}(z_k)\sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(z_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}\,|n_k\rangle. \tag{4.25}$$

La normalización $\langle z_k|z_k\rangle = 1$ nos da una expresión para $|C_{0_k}(z_k)|^2$ y tomando la fase igual a cero tendremos

$$C_{0_k}(z_k) = \exp\left(-\frac{|z_k|^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{r_k^2}{2}\right), \tag{4.26}$$

donde $z_k = r_k e^{\mathbf{i}\theta_k}$. Finalmente tendremos

$$|z_k\rangle = \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(z_k)^{n_k} e^{-\frac{r_k^2}{2}}}{\sqrt{n_k!}} |n_k\rangle. \tag{4.27}$$

Ahora, hemos visto que $B_k^\dagger$ y B_k son respectivamente los operadores de creación y aniquilación para los eigenestados del operador número, así que los eigenestados de B_k serán por definición los estados coherentes de nuestro sistema. De este modo, hemos encontrado que los EC tienen la forma general dada en la ecuación anterior.

4.1.1. Completez del conjunto $\{|z_k\rangle\}$

Notemos que, en la derivación de los vectores $|z_k\rangle$ no obtuvimos ninguna restricción sobre el valor de z_k; tendremos por tanto un conjuto continuo e infinito de eigenestados del operador B_k.

Ahora mostraremos que los vectores $\{|z_k\rangle\}$ forman un conjunto completo en el espacio de estados. Para esto, calculamos la integral sobre el plano complejo

$$\int |z_k\rangle\langle z_k| d^2 z_k = \sum_{m_k, n_k=0}^{\infty} \frac{|m_k\rangle\langle n_k|}{\sqrt{m_k! n_k!}} \int (z_k)^{m_k} (z_k^*)^{n_k} e^{-r_k^2} d^2 z_k. \tag{4.28}$$

Haciendo la integral en coordenadas polares y usando que

$$2\int_0^\infty \exp(-r^2) r^{2n+1} dr = n! \tag{4.29}$$

junto con la completez del conjunto $\{|n_k\rangle\}$, resulta que

$$\frac{1}{\pi} \int |z_k\rangle\langle z_k| d^2 z_k = 1. \tag{4.30}$$

Por tanto, los vectores $\{|z_k\rangle\}$ forman un conjunto completo. En particular podemos escribir

$$|z_k'\rangle = \frac{1}{\pi} \int |z_k\rangle\langle z_k|z_k'\rangle d^2 z_k. \tag{4.31}$$

El valor del kernel reproductivo $\langle z_k|z_k'\rangle$ se calcula usando la ecuación 4.27, lo que nos lleva a

$$\langle z_k|z_k'\rangle = \exp\left(-\frac{r_k^2}{2} + z_k^* z_k' - \frac{{r_k'}^2}{2}\right). \tag{4.32}$$

De aquí vemos que los estados coherentes no son ortogonales entre sí. Notemos además que, cuando mucho, puede haber un $|n_k\rangle$ que sea también un estado coherente ya que cualesquiera dos $|n_k\rangle$'s serán ortogonales entre sí, a diferencia de los estados coherentes. Analizando la forma de la ecuación 4.27, es claro que el único vector $|n_k\rangle$ que es también un estado coherente es el estado $|0_k\rangle$ que se obtiene cuando $z_k = 0$, es decir,

$$|z_k = 0\rangle = |0_k\rangle = |\psi_0\rangle. \tag{4.33}$$

4.1.2. EC a partir del operador de desplazamiento $D_k(z)$

Recordando ahora las definiciones que se tienen para los estados coherentes, consideremos el operador de desplazamiento D_k, definido por la ecuación 1.2 en términos de los operadores de creación y aniquilación del conjunto $\{|n_k\rangle\}$. A continuación investigaremos si los vectores dados en 4.27 coinciden con aquellos derivados de aplicar el operador $D_k = e^{(z_k B_k^\dagger - z_k^* B_k)}$ al estado extremal $|\psi_0\rangle$.

Sean $R = z_k B_k^\dagger$ y $S = -z_k^* B_k$, lo cual implica que $[R, S] = |z_k|^2 = r_k^2$, $[R, [R, S]] = [S, [R, S]] = 0$, así como los subsecuentes conmutadores. Usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$\exp(R)\exp(S) = \exp\Big(R+S+\frac{1}{2}\,[R,S]+\frac{1}{12}\,\big([R,[R,S]]+[S,[S,R]]\big)+\dots\Big), \tag{4.34}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \exp(z_k B_k^\dagger)\exp(-z_k^* B_k) &= \exp\Big(z_k B_k^\dagger - z_k^* B_k + \frac{1}{2}\,r_k^2\Big) \\ &= \exp(z_k B_k^\dagger - z_k^* B_k)\exp\Big(\frac{1}{2}\,r_k^2\Big). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Por lo tanto

$$D_k(z_k) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\,r_k^2\Big)\exp(z_k B_k^\dagger)\exp(-z_k^* B_k). \tag{4.36}$$

Ahora,

$$\exp(-z_k^* B_k)|\psi_0\rangle = \exp(-z_k^* B_k)|0_k\rangle = |0_k\rangle,$$

mientras que

$$\exp(z_k B_k^\dagger)|0_k\rangle = \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(z_k)^{n_k}(B_k^\dagger)^{n_k}}{n_k!}|0_k\rangle = \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(z_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}|n_k\rangle.$$

Lo anterior implica

$$D_k(z_k)|\psi_0\rangle = \exp\Big(-\frac{1}{2}\, r_k^2\Big) \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{(z_k)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}|n_k\rangle = |z_k\rangle, \tag{4.37}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Entonces, podemos obtener los estados coherentes ya sea como combinación lineal de los eigenestados del operador H_k (ver ecuación 4.27), o directamente a partir del estado extremal $|\psi_0\rangle$ del Hamiltoniano total, como se muestra en la ecuación anterior.

Consideremos ahora el operador de desplazamiento en el espacio completo, dado por

$$D(z) = D(z_1, z_2, z_3) = D_1(z_1)D_2(z_2)D_3(z_3). \tag{4.38}$$

Así tendremos

$$\begin{aligned} |z\rangle &= D(z)|\psi_0\rangle = D(z_1)D(z_2)D(z_3)\big|\psi_0\rangle \qquad (4.39) \\ &= D(z_1)D(z_2)D(z_3)|z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0\rangle = |z_1, z_2, z_3\rangle \\ &= \exp\Big(-\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{2}\Big) \sum_{n_1,n_2,n_3=0}^{\infty} \frac{(z_1)^{n_1}(z_2)^{n_2}(z_3)^{n_3}}{\sqrt{n_1!\; n_2!\; n_3!}}|n_1, n_2, n_3\rangle. \end{aligned}$$

Puesto que $[z_jB_j^\dagger - z_j^*B_j, z_kB_k^\dagger - z_k^*B_k] = 0$ para todo j, k, resulta que

$$\begin{aligned} D(z) &= e^{z_1B_1^\dagger - z_1^*B_1} e^{z_2B_2^\dagger - z_2^*B_2} e^{z_3B_3^\dagger - z_3^*B_3} \\ &= e^{z_1B_1^\dagger + z_2B_2^\dagger + z_3B_3^\dagger - (z_1^*B_1 + z_2^*B_2 + z_3^*B_3)}. \qquad (4.40) \end{aligned}$$

Usando ahora la expresión 4.11 tendremos

$$D(z) = e^{-i(\vec{\Gamma}\cdot\vec{P} - \vec{\Sigma}\cdot\vec{X})}, \tag{4.41}$$

donde hemos tomado

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= 2\mathrm{Re}[z_1^*\vec{\alpha_1} + z_2^*\vec{\alpha_2} + z_3^*\vec{\alpha_3}], \qquad (4.42) \\ \vec{\Sigma} &= -2\mathrm{Im}[z_1^*\vec{\beta_1} + z_2^*\vec{\beta_2} + z_3^*\vec{\beta_3}]. \end{aligned}$$

Usando ahora la fórmula BCH dada en 4.34, para cuando tanto A como B conmutan con $[A, B]$,

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]}e^Ae^B \tag{4.43}$$

se llega a

$$D(z) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{i\ \vec{\Sigma}\cdot\vec{X}}e^{-i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}} = e^{\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{-i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}}e^{i\ \vec{\Sigma}\cdot\vec{X}}. \tag{4.44}$$

4.2. Cantidades físicas de los EC

Usando la expresión previa del operador de desplazamiento y la relación 4.39 podemos encontrar la forma explícita para la función de onda de los estados coherentes $|z\rangle$,

$$\begin{aligned}\phi_z(\vec{x}) &= \langle\vec{x}|z\rangle = \langle\vec{x}|D(z)|\psi_0\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{i\vec{\Sigma}\cdot\vec{x}}\langle\vec{x}|e^{-i\vec{P}\cdot\vec{\Gamma}}|\psi_0\rangle\end{aligned}$$

donde ahora $\vec{x}$ representa el valor de la posición. Entonces, usando que $[X, f(P)] = if'(P)$, podemos ver ([19]) que el operador $e^{-ib_iP_i}$, con $b_i \in \mathbb{R}$, es un operador de desplazamiento en los vectores $|x_i\rangle$ pues tendremos que

$$X_i e^{-ib_iP_i}|x_i\rangle = (x_i + b_i)e^{-ib_iP_i}|x_i\rangle, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{4.45}$$

es decir,

$$e^{-ib_iP_i}|x_i\rangle = |x_i + b_i\rangle \qquad \Rightarrow \quad \langle x_i|e^{ib_iP_i} = \langle x_i + b_i|. \tag{4.46}$$

En nuestro caso tridimensional

$$\langle\vec{x}|e^{-i\vec{P}\cdot\vec{\Gamma}} = \langle\vec{x} - \vec{\Gamma}|,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\phi_z(\vec{x}) &= e^{-\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{i\vec{\Sigma}\cdot\vec{x}}\langle\vec{x} - \vec{\Gamma}|\psi_0\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{i\vec{\Sigma}\cdot\vec{x}}\psi_0(\vec{x} - \vec{\Gamma}).\end{aligned} \tag{4.47}$$

Si usamos ahora la forma de $\psi_0(\vec{x})$ dada en la ecuación 4.9, llegamos a

$$\begin{aligned}\phi_z(\vec{x}) &= e^{-\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{i\vec{\Sigma}\cdot\vec{x}}ce^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\Gamma})^T\mathbf{a}(\vec{x}-\vec{\Gamma})} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\vec{\Gamma}^T\mathbf{a}+i\vec{\Sigma})\cdot\vec{\Gamma}}e^{(\vec{\Gamma}^T\mathbf{a}+i\vec{\Sigma})\cdot\vec{x}}\psi_0(\vec{x}).\end{aligned} \tag{4.48}$$

También podemos calcular fácilmente los valores esperados $\langle X_j\rangle_z \equiv \langle z|X_j|z\rangle$ y $\langle P_j\rangle_z \equiv \langle z|P_j|z\rangle$ $(j = 1, 2, 3)$, para algún estado dado $|z\rangle = |z_1, z_2, z_3\rangle$ así como sus desviaciones cuadráticas medias, en términos de las cantidades correspondientes para el estado extremal $|\psi_0\rangle$, que denotaremos como $\langle\psi_0|A|\psi_0\rangle \equiv \langle A\rangle_0$ para cualquier operador A.

Por componentes, tenemos que la ecuación 4.39 nos lleva a

$$\begin{aligned}\langle X_j\rangle_z &\equiv \langle z|X_j|z\rangle \\ &= \langle\psi_0|D^\dagger(z)X_jD(z)|\psi_0\rangle.\end{aligned} \tag{4.49}$$

De la ecuación 4.44 es claro que

$$D^\dagger(z) = e^{\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{i\vec{P}\cdot\vec{\Gamma}}e^{-i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}} = e^{-\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{-i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}}e^{i\vec{P}\cdot\vec{\Gamma}}. \tag{4.50}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle X_j\rangle_z &= \langle\psi_0|e^{\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{i\vec{P}\cdot\vec{\Gamma}}e^{-i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}}X_je^{-\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}}e^{-i\vec{P}\cdot\vec{\Gamma}}|\psi_0\rangle \\ &= \langle\psi_0|e^{i\vec{P}\cdot\vec{\Gamma}}X_je^{-i\vec{P}\cdot\vec{\Gamma}}|\psi_0\rangle,\end{aligned} \tag{4.51}$$

donde hemos usado que todas las entradas del vector $\vec{X}$ conmutan con X_j. Por tanto debemos calcular

$$e^{i\vec{P}\cdot\vec{\Gamma}}X_je^{-i\vec{P}\cdot\vec{\Gamma}} = e^{i\Gamma_iP_i}X_je^{-i\Gamma_iP_i},$$

con suma sobre los índices repetidos y donde Γ_i es la i-ésima componente del vector $\vec{\Gamma}$ definido en la ecuación 4.42.

Ahora, para dos operadores A y B tales que ambos conmutan con su conmutador $[A, B]$, es válida la siguiente expresión

$$e^{At}Be^{-At} = B + t[A, B]. \tag{4.52}$$

Tomando $A = P_i$, $B = X_j$, resulta que

$$e^{i\Gamma_iP_i}X_je^{-i\Gamma_iP_i} = X_j + \Gamma_j.$$

Así tendremos

$$\langle X_j\rangle_z = \langle X_j\rangle_0 + \Gamma_j. \tag{4.53}$$

Ahora

$$\langle X_j^2\rangle_z = \langle\psi_0|e^{i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}}X_j^2e^{-i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}}|\psi_0\rangle,$$

lo que se puede simplificar introduciendo un operador identidad de la forma

$$\mathbf{1} = e^{-i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}}e^{i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}} \tag{4.54}$$

entre los dos operadores X_j de $X_j^2 = X_jX_j$, de modo que la ecuación 4.53 nos lleva a

$$\begin{aligned}
\langle X_j^2\rangle_z &= \langle\psi_0|e^{i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}}X_je^{-i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}}e^{i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}}X_je^{-i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}} \\
&= \langle\psi_0|(X_j+\Gamma_j)(X_j+\Gamma_j)|\psi_0\rangle \\
&= \langle\psi_0|\big(X_j^2+2\Gamma_jX_j+{\Gamma_j}^2)|\psi_0\rangle \\
&= \langle X_j^2\rangle_0+2\Gamma_j\langle X_j\rangle_0+{\Gamma_j}^2. \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, llegamos a

$$(\Delta X_j)_z^2 = \langle X_j^2\rangle_z - \langle X_j\rangle_z^2 = \langle X_j^2\rangle_0 - \langle X_j\rangle_0^2 = (\Delta X_j)_0^2. \qquad (4.56)$$

Trabajemos de modo idéntico para P_j, donde ahora tenemos

$$\langle P_j\rangle_z = \langle\psi_0|e^{-\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{-i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}}e^{i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}}P_je^{\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}}e^{-i\vec{\Gamma}\cdot\vec{P}}e^{i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}}|\psi_0\rangle.$$

Usando la ecuación 4.52, tenemos que

$$e^{-i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}}P_je^{i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}} = P_j+\Sigma_j.$$

Por lo tanto

$$\langle P_j\rangle_z = \langle P_j\rangle_0 + \Sigma_j. \qquad (4.57)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\langle P_j^2\rangle_z &= \langle\psi_0|e^{-i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}}P_j^2e^{i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}}|\psi_0\rangle \\
&= \langle\psi_0|(P_j+\Sigma_j)(P_j+\Sigma_j)|\psi_0\rangle \\
&= \langle\psi_0|(P_j^2+2\Sigma_jP_j+{\Sigma_j}^2)|\psi_0\rangle \\
&= \langle P_j^2\rangle_0+2\Sigma_j\langle P_j\rangle_0+{\Sigma_j}^2. \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

Entonces tendremos también que

$$(\Delta P_j)_z^2 = \langle P_j^2\rangle_z - \langle P_j\rangle_z^2 = \langle P_j^2\rangle_0 - \langle P_j\rangle_0^2 = (\Delta P_j)_0^2. \qquad (4.59)$$

Para finalizar esta sección, es necesario obtener los valores de $\langle X_j\rangle_0$, $\langle P_j\rangle_0$, $\langle X_j^2\rangle_0$ y $\langle P_j^2\rangle_0$ con $j=1,2,3$. Los primeros seis valores esperados se pueden calcular fácilmente si recordamos la forma de los operadores $B_k, B_k^\dagger$ en las ecuaciones 4.11 y tomamos el valor esperado de cada uno de ellos en el estado $|\psi_0\rangle$,

$$\langle\psi_0|B_k|\psi_0\rangle = i(\vec{\alpha_k})_j\langle P_j\rangle_0 + (\vec{\beta_k})_j\langle X_j\rangle_0 = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{4.60}$$

$$\langle\psi_0|B_k^\dagger|\psi_0\rangle = -i(\vec{\alpha_k})_j^*\langle P_j\rangle_0 + (\vec{\beta_k})_j^*\langle X_j\rangle_0 = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{4.61}$$

donde $(\vec{u_k})_j$ indica la j-ésima componente del vector $\vec{u_k}$ y tenemos suma sobre el índice j. Notese que hemos usado $\langle\psi_0|B_k^\dagger = 0$ para obtener el cero de la segunda igualdad. Tenemos entonces 6 ecuaciones homogéneas de las cuales se pueden obtener las 6 incógnitas $\langle X\rangle_0$, $\langle Y\rangle_0$, $\langle Z\rangle_0$, $\langle P_x\rangle_0$, $\langle P_y\rangle_0$ y $\langle P_z\rangle_0$.

Ahora, para calcular los valores esperados de los operadores cuadráticos X_i^2 y P_i^2, tendremos que emplear los resultados correspondientes para los productos a pares de B_j y $B_k^\dagger$. Notemos que los productos se deben tomar en el orden correcto para poder emplear que B_j aniquila al ket $|\psi_0\rangle$ y que $B_k^\dagger$ aniquila al bra $\langle\psi_0|$. Tendremos entonces 21 productos distintos, al combinar por pares los 6 operadores B_i y $B_j^\dagger$, para $i, j = 1, 2, 3$. Los valores esperados de estos productos nos darán 21 ecuaciones, con el mismo número de incógnitas, las cuales no necesariamente serán ecuaciones homogéneas. Con este sistema de ecuaciones no sólo se obtendrán los valores esperados $\langle X_j^2\rangle_0$ y $\langle P_j^2\rangle_0$ ($j = 1, 2, 3$), que inicialmente buscamos, sino que obtendremos los valores esperados de cualquier producto cuadrático de los operadores canónicos $X_i\, P_j$. Este procedimiento quedará más claro en los ejemplos que se muestran al final del trabajo.

A continuación vamos a calcular el valor esperado $\langle H\rangle_z$ del Hamiltoniano total H en un estado coherente arbitrario $|z\rangle$. Las ecuaciones 4.22 y 4.5 conducen a

$$\langle H\rangle_z = \langle z|H|z\rangle = \sum_{k=1}^{3}\omega_k\gamma_k|z_k|^2 + g_0'. \tag{4.62}$$

Para obtener también el valor esperado de H^2, tomamos primero

$$H^2 = \sum_{j,k=1}^{3}\gamma_j\gamma_k\omega_j\omega_k B_j^\dagger B_k^\dagger B_j B_k + \sum_{k=1}^{3}\omega_k^2 B_k^\dagger B_k + 2g_0'\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\omega_k B_k^\dagger B_k + {g_0'}^2$$

y por tanto tendremos

$$\langle H^2\rangle_z = \sum_{j,k=1}^{3}\gamma_j\gamma_k\omega_j\omega_k|z_j|^2|z_k|^2 + \sum_{k=1}^{3}\omega_k^2|z_k|^2 + 2g_0'\sum_{k=1}^{3}\gamma_k\omega_k|z_k|^2 + {g_0'}^2,$$

así que

$$(\Delta H)_z^2 = \sum_{k=1}^{3} \omega_k^2 |z_k|^2. \tag{4.63}$$

Será interesante ilustrar a continuación estos resultados generales mediante algunos ejemplos.

Capítulo 5

Algunas aplicaciones del método

5.1. Sistema bidimensional atractivo

Podemos ahora continuar el análisis del sistema de la sección 2.2 para el caso atractivo, en el que se encuentran eigenvalores puramente imaginarios ($\pm i|1 \pm \beta|$). Recordemos que hemos obtenido tres diferentes comportamientos dependiendo del valor de β:

$$\begin{array}{ccc} \beta < -1, & \gamma_1 = -1, & \gamma_2 = 1, \\ -1 < \beta < 1, & \gamma_1 = 1, & \gamma_2 = 1, \\ 1 < \beta, & \gamma_1 = 1, & \gamma_2 = -1. \end{array} \tag{5.1}$$

De este modo, según las definiciones 4.2, tendremos:

$$\begin{array}{ccccc} \beta < -1, & B_1 = A_1^+, & B_1^\dagger = A_1^-, & B_2 = A_2^-, & B_2^\dagger = A_2^+, \\ -1 < \beta < 1, & B_1 = A_1^-, & B_1^\dagger = A_1^+, & B_2 = A_2^-, & B_2^\dagger = A_2^+, \\ 1 < \beta, & B_1 = A_1^-, & B_1^\dagger = A_1^+, & B_2 = A_2^+, & B_2^\dagger = A_2^-. \end{array} \tag{5.2}$$

Para obtener la forma de la función de onda $\psi_0(\vec{x})$ en cada caso, debemos obtener la matriz **a** partiendo de los vectores $\vec{\alpha_j}$ y $\vec{\beta_j}$ mediante la ecuación 4.10 para $j = 1, 2, 3$.

Considerando primero la región $\beta < -1$, tendremos que

$$B_1 = \frac{r_1}{2|r_1|}(X - iY + iP_x + P_y), \tag{5.3}$$

$$B_2 = \frac{r_2^*}{2|r_2|}(-X - iY - iP_x + P_y), \tag{5.4}$$

de donde

$$\vec{\alpha_1} = \frac{r_1}{2|r_1|}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta_1} = \frac{r_1}{2|r_1|}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$
$$\vec{\alpha_2} = \frac{r_2^*}{2|r_2|}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta_2} = \frac{r_2^*}{2|r_2|}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix},$$

por lo que obtendremos

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Entonces, usando la fórmula 4.9, se llega a

$$\psi_0(\vec{x}) = ce^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}. \tag{5.6}$$

En general, un eigenestado arbitrario de H se expresa

$$\psi_{n_1,n_2}(\vec{x}) = c\frac{B_1^{\dagger n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{B_2^{\dagger n_2}}{\sqrt{n_2!}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}. \tag{5.7}$$

Por otro lado, podemos obtener el operador de desplazamiento $D(z)$ dado por la ecuación 4.44, donde ahora

$$\vec{\Gamma} = \mathrm{Re}\left[\frac{z_1^* r_1}{|r_1|}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{z_2^* r_2^*}{|r_2|}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}\right],$$
$$\vec{\Sigma} = -\mathrm{Im}\left[\frac{z_1^* r_1}{|r_1|}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{z_2^* r_2^*}{|r_2|}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}\right].$$

Si tomamos, por simplicidad, las fases de r_1 y r_2 iguales a cero, tendremos

$$\vec{\Gamma} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}[z_1 - z_2] \\ -\mathrm{Im}[z_1 + z_2] \end{pmatrix},$$
$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathrm{Im}[z_1 - z_2] \\ \mathrm{Re}[z_1 + z_2] \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

y podremos reducir el operador de desplazamiento a la forma

$$D(z_1, z_2) = e^{-\frac{i}{2}\{\mathrm{Re}[z_1-z_2]\mathrm{Im}[z_1-z_2]-\mathrm{Re}[z_1+z_2]\mathrm{Im}[z_1+z_2]\}}e^{i\left(\mathrm{Im}[z_1-z_2]X+\mathrm{Re}[z_1+z_2]Y\right)}$$
$$\times e^{-i\left(\mathrm{Re}[z_1-z_2]P_x-\mathrm{Im}[z_1+z_2]P_y\right)}.$$

Por tanto tendremos

$$\phi_z(\vec{x}) = e^{-\frac{i}{2}(\mathrm{Re}[z_1-z_2]\mathrm{Im}[z_1-z_2]-\mathrm{Re}[z_1+z_2]\mathrm{Im}[z_1+z_2])}e^{i\Big(\mathrm{Im}[z_1-z_2]x+\mathrm{Re}[z_1+z_2]y\Big)} \\ \times\psi_0\big(x-\mathrm{Re}[z_1-z_2]\ ,\ y+\mathrm{Im}[z_1+z_2]\big). \tag{5.9}$$

Ahora, los valores esperados de los operadores X, Y, P_x y P_y en un estado coherente $|z\rangle = |z_1, z_2\rangle$ se obtendrán de las ecuaciones 4.53 y 4.57, las cuales se expresan en términos de $\langle X\rangle_0$, $\langle Y\rangle_0$, $\langle P_x\rangle_0$ y $\langle P_y\rangle_0$. Como mencionamos al final de la sección 4.2, es posible determinar estos valores del conjunto de ecuaciones que se forma al evaluar $\langle B_j\rangle_0$ y $\langle B_j^\dagger\rangle_0$ para $j = 1, 2$. En nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned}
\langle B_1\rangle_0 &= \frac{1}{2}\Big(\langle X\rangle_0 - i\langle Y\rangle_0 + i\langle P_x\rangle_0 + \langle P_y\rangle_0\Big) = 0,\\
\langle B_2\rangle_0 &= \frac{1}{2}\Big(-\langle X\rangle_0 - i\langle Y\rangle_0 - i\langle P_x\rangle_0 + \langle P_y\rangle_0\Big) = 0,\\
\langle B_1^\dagger\rangle_0 &= \frac{1}{2}\Big(\langle X\rangle_0 + i\langle Y\rangle_0 - i\langle P_x\rangle_0 + \langle P_y\rangle_0\Big) = 0,\\
\langle B_2^\dagger\rangle_0 &= \frac{1}{2}\Big(-\langle X\rangle_0 + i\langle Y\rangle_0 + i\langle P_x\rangle_0 + \langle P_y\rangle_0\Big) = 0,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos directamente que

$$\langle X\rangle_0 = \langle Y\rangle_0 = \langle P_x\rangle_0 = \langle P_y\rangle_0 = 0. \tag{5.10}$$

Por tanto, sustituyendo lo anterior en las ecuaciones 4.53 y 4.57 obtenemos

$$\langle X\rangle_{z_1,z_2} = \mathrm{Re}[z_1-z_2], \qquad \langle Y\rangle_{z_1,z_2} = -\mathrm{Im}[z_1+z_2], \tag{5.11}$$

$$\langle P_x\rangle_{z_1,z_2} = \mathrm{Im}[z_1-z_2], \qquad \langle P_y\rangle_{z_1,z_2} = \mathrm{Re}[z_1+z_2]. \tag{5.12}$$

Podemos además evaluar $\langle X^2\rangle_0$, $\langle Y^2\rangle_0$, $\langle P_x^2\rangle_0$ y $\langle P_y^2\rangle_0$ del cálculo de los valores esperados de los productos cuadráticos entre los operadores B_j, $B_k^\dagger$. En este caso, por ser un sistema bidimensional tenemos 4 operadores con los que podemos obtener 10 productos independientes y, por tanto, 10 ecuaciones para el mismo número de incognitas ($\langle X^2\rangle_0$, $\langle Y^2\rangle_0$, $\langle P_x^2\rangle_0$, $\langle P_y^2\rangle_0$, $\langle XY\rangle_0$, $\langle P_xP_y\rangle_0$, $\langle XP_x\rangle_0$, $\langle YP_y\rangle_0$, $\langle XP_y\rangle_0$, $\langle YP_x\rangle_0$).

Así, calculemos primero

$$\begin{aligned}
B_1^2 &= \frac{1}{4}(X^2 - Y^2 - P_x^2 + P_y^2 - 2iXY + 2iP_xP_y + 2iXP_x - 2iYP_y + 2XP_y + 2YP_x),\\
B_1^\dagger B_1 &= \frac{1}{4}(X^2 + Y^2 + P_x^2 + P_y^2 + 2XP_y - 2YP_x - 2),\\
B_1 B_2 &= \frac{1}{4}(-X^2 - Y^2 + P_x^2 + P_y^2 - 2iXP_x - 2iYP_y - 2),\\
B_2^\dagger B_1 &= \frac{1}{4}(-X^2 + Y^2 - P_x^2 + P_y^2 + 2iXY + 2iP_xP_y),\\
B_1^{\dagger 2} &= \frac{1}{4}(X^2 - Y^2 - P_x^2 + P_y^2 + 2iXY - 2iP_xP_y - 2iXP_x + 2iYP_y + 2XP_y + 2YP_x),\\
B_1^\dagger B_2 &= \frac{1}{4}(-X^2 + Y^2 - P_x^2 + P_y^2 - 2iXY - 2iP_xP_y),\\
B_1^\dagger B_2^\dagger &= \frac{1}{4}(-X^2 - Y^2 + P_x^2 + P_y^2 + 2iXP_x + 2iYP_y + 2),\\
B_2^2 &= \frac{1}{4}(X^2 - Y^2 - P_x^2 + P_y^2 + 2iXY - 2iP_xP_y + 2iXP_x - 2iYP_y - 2XP_y - 2YP_x),\\
B_2^\dagger B_2 &= \frac{1}{4}(X^2 + Y^2 + P_x^2 + P_y^2 - 2XP_y + 2YP_x - 2),\\
B_2^{\dagger 2} &= \frac{1}{4}(X^2 - Y^2 - P_x^2 + P_y^2 - 2iXY + 2iP_xP_y - 2iXP_x + 2iYP_y - 2XP_y - 2YP_x),
\end{aligned}$$

donde hemos tomado nuevamente las fases de r_1 y r_2 iguales a cero. Ahora tomaremos el valor esperado en el estado extremal $|\psi_0\rangle$ de cada uno de los productos anteriores. Notemos que el orden de los operadores se dispuso de modo que podamos usar $B_j|\psi_0\rangle = 0$ o $\langle\psi_0|B_j^\dagger = 0$. Resolviendo entonces el sistema de ecuaciones resultante obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle X^2\rangle_0 &= \frac{1}{2}, \quad \langle XY\rangle_0 = 0, \quad \langle XP_y\rangle_0 = 0,\\
\langle Y^2\rangle_0 &= \frac{1}{2}, \quad \langle P_xP_y\rangle_0 = 0, \quad \langle YP_x\rangle_0 = 0,\\
\langle P_x^2\rangle_0 &= \frac{1}{2}, \quad \langle XP_x\rangle_0 = \frac{i}{2},\\
\langle P_y^2\rangle_0 &= \frac{1}{2}, \quad \langle YP_y\rangle_0 = \frac{i}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, tendremos que

$$\begin{aligned}
\langle X^2\rangle_{z_1,z_2} &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}^2[z_1 - z_2], \\
\langle Y^2\rangle_{z_1,z_2} &= \frac{1}{2} + \mathrm{Im}^2[z_1 + z_2], \\
\langle P_x^2\rangle_{z_1,z_2} &= \frac{1}{2} + \mathrm{Im}^2[z_1 - z_2], \\
\langle P_y^2\rangle_{z_1,z_2} &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}^2[z_1 + z_2].
\end{aligned}$$

de donde podemos comprobar que

$$\begin{aligned}
(\Delta X)_z^2 &= \langle X^2\rangle_z - \langle X\rangle_z^2 = \frac{1}{2}, \qquad (\Delta Y)_z^2 = \frac{1}{2}, \\
(\Delta P_x)_z^2 &= \langle P_x^2\rangle_z - \langle P_x\rangle_z^2 = \frac{1}{2}, \qquad (\Delta P_y)_z^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, vemos que el producto $(\Delta X_j)_z\ (\Delta P_j)_z$ minimiza la relación de incertidumbre de Heisenberg, tal y como uno esperaría para sistemas equivalentes a osciladores armónicos desacoplados en varias dimensiones.

Para los otros dos casos seguiremos un procedimiento similar. Así, para $-1 < \beta < 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha_1} &= \frac{r_1^*}{2|r_1|}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta_1} = \frac{r_1^*}{2|r_1|}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \\
\vec{\alpha_2} &= \frac{r_2^*}{2|r_2|}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta_2} = \frac{r_2^*}{2|r_2|}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

mientras que, para la región $1 < \beta$,

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha_1} &= \frac{r_1^*}{2|r_1|}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta_1} = \frac{r_1^*}{2|r_1|}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \\
\vec{\alpha_2} &= \frac{r_2}{2|r_2|}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta_2} = \frac{r_2}{2|r_2|}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Notemos que, con la suposición de que r_1 y r_2 son reales y positivos, los vectores $\vec{\alpha_i}$ y $\vec{\beta_i}$ coinciden en los tres casos, por lo que obtendremos los mismos resultados, tanto en la forma de la función de onda $\psi_0(\vec{x})$ como en los valores esperados.

5.2. Oscilador tridimensional anisotrópico

A continuación trataremos un ejemplo tridimensional muy simple para mostrar cómo se desarrolla el método presentado en el capítulo anterior. Sea

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2} + \frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2} + \frac{\omega_z^2 z^2}{2}. \tag{5.13}$$

En este caso la matriz $\mathbf{\Lambda}$ estará dada por

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_z^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

para la cual los eigenvalores son siempre imaginarios de la forma

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\omega, \qquad \lambda_1^* = -i\omega, \\ \lambda_2 &= i\omega, \qquad \lambda_2^* = -i\omega, \\ \lambda_3 &= i\omega_z, \qquad \lambda_3^* = -i\omega_z. \end{aligned}$$

Tendremos entonces los eigenvectores normalizados

$$|u_1\rangle = \frac{1}{2r_1\omega}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; |u_2\rangle = \frac{1}{2r_2\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}, \; |u_3\rangle = \frac{1}{2r_3\omega_z}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

y sus complejos conjugados, mientras que las eigenformas serán

$$\begin{aligned} \langle e_1| &= r_1(i\omega, 0, 0, 1, 0, 0), \\ \langle e_2| &= r_2(0, i\omega, 0, 0, 1, 0), \\ \langle e_3| &= r_3(0, 0, i\omega_z, 0, 0, 1), \end{aligned} \tag{5.16}$$

y sus correspondientes conjugadas. Definimos entonces los operadores L_i^+ y L_i^- como

$$\begin{aligned} L_1^+ &= r_1(i\omega X + P_x), \quad L_2^+ = r_2(i\omega Y + P_y), \quad L_3^+ = r_3(i\omega_z Z + P_z), \\ L_1^- &= r_1^*(-i\omega X + P_x), \quad L_2^- = r_2^*(-i\omega Y + P_y), \quad L_3^- = r_3^*(-i\omega_z Z + P_z), \end{aligned} \tag{5.17}$$

los cuales satisfacen

$$[L_1^-, L_1^+] = 2\omega|r_1|^2, \qquad [L_2^-, L_2^+] = 2\omega|r_2|^2, \qquad [L_3^-, L_3^+] = 2\omega_z|r_3|^2.$$

Ya que estos conmutadores son mayores o iguales que cero, la ecuación 4.2 nos lleva a identificar

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{L_i^-}{|r_i|\sqrt{2\omega}}, \qquad\qquad i = 1, 2, \\ B_3 &= \frac{L_3^-}{|r_3|\sqrt{2\omega_z}}. \end{aligned}$$

Así, siguiendo la ecuación 4.5 podemos escribir

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \omega_k B_k^\dagger B_k + g_0' \\ &= \omega\big(B_1^\dagger B_1 + B_2^\dagger B_2\big) + \omega_z B_3^\dagger B_3 - \frac{2\omega + \omega_z}{2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tendremos los vectores

$$\vec{\alpha_1} = \frac{-i}{\sqrt{2\omega}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha_2} = \frac{-i}{\sqrt{2\omega}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha_3} = \frac{-i}{\sqrt{2\omega_z}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde hemos tomado por simplicidad r_1, r_2 y r_3 reales. Mientras tanto

$$\vec{\beta_1} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta_2} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta_3} = -i\sqrt{\frac{\omega_z}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz **a** definida en la ecuación 4.10 resulta ser

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega_z \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Con lo anterior, podemos obtener el estado extremal $\psi_0(\vec{x})$ como

$$\psi_0(\vec{x}) = c e^{-\frac{1}{2}\{\omega(x^2+y^2)+\omega_z z^2\}}. \tag{5.19}$$

Para obtener la forma explícita de los estados coherentes de nuestro sistema, usaremos la definición 4.39, por lo que debemos calcular primero el operador $D(z)$. Para esto empleamos la relación 4.41 en donde, para los números complejos z_1, z_2, z_3, tendremos

$$\vec{\Gamma} = -\sqrt{2}\ \mathrm{Im}\begin{pmatrix} \frac{z_1}{\sqrt{\omega}} \\ \frac{z_2}{\sqrt{\omega}} \\ \frac{z_3}{\sqrt{\omega_z}} \end{pmatrix}, \qquad \vec{\Sigma} = \sqrt{2}\ \mathrm{Re}\begin{pmatrix} z_1\sqrt{\omega} \\ z_2\sqrt{\omega} \\ z_3\sqrt{\omega_z} \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma} &= -2\Big(\mathrm{Im}[z_1]\mathrm{Re}[z_1] + \mathrm{Im}[z_2]\mathrm{Re}[z_2] + \mathrm{Im}[z_3]\mathrm{Re}[z_3]\Big), \\ \vec{\Sigma}\cdot\vec{X} &= \sqrt{2}\ \mathrm{Re}\Big(z_1\sqrt{\omega}\ X + z_2\sqrt{\omega}\ Y + z_3\sqrt{\omega_z}\ Z\Big), \\ \vec{\Gamma}\cdot\vec{P} &= -\sqrt{2}\ \mathrm{Im}\Big(\frac{z_1P_x + z_2P_y}{\sqrt{\omega}} + \frac{z_3P_z}{\sqrt{\omega_z}}\Big). \end{aligned}$$

El operador de desplazamiento queda entonces como

$$\begin{aligned} D(z) = e^{i\left(\mathrm{Im}[z_1]\mathrm{Re}[z_1]+\mathrm{Im}[z_2]\mathrm{Re}[z_2]+\mathrm{Im}[z_3]\mathrm{Re}[z_3]\right)}\, e^{i\sqrt{2}\ \mathrm{Re}\left(z_1\sqrt{\omega}\ X+z_2\sqrt{\omega}\ Y+z_3\sqrt{\omega_z}\ Z\right)} \\ \times e^{i\sqrt{2}\ \mathrm{Im}\left(\frac{z_1P_x+z_2P_y}{\sqrt{\omega}}+\frac{z_3P_z}{\sqrt{\omega_z}}\right)}. \end{aligned}$$

Así, obtenemos los estados coherentes del sistema en la forma

$$\begin{aligned} \phi_z(\vec{x}) &= e^{i\left(\mathrm{Im}[z_1]\mathrm{Re}[z_1]+\mathrm{Im}[z_2]\mathrm{Re}[z_2]+\mathrm{Im}[z_3]\mathrm{Re}[z_3]\right)}\, e^{i\sqrt{2}\ \mathrm{Re}\left(z_1\sqrt{\omega}\ x+z_2\sqrt{\omega}\ y+z_3\sqrt{\omega_z}\ z\right)} \\ &\qquad \times\langle x|e^{i\sqrt{2}\ \mathrm{Im}\left(\frac{z_1P_x+z_2P_y}{\sqrt{\omega}}+\frac{z_3P_z}{\sqrt{\omega_z}}\right)}|\psi_0\rangle \\ &= e^{i\left(\mathrm{Im}[z_1]\mathrm{Re}[z_1]+\mathrm{Im}[z_2]\mathrm{Re}[z_2]+\mathrm{Im}[z_3]\mathrm{Re}[z_3]\right)}\, e^{i\sqrt{2}\mathrm{Re}\left(z_1\sqrt{\omega}\ x+z_2\sqrt{\omega}\ y+z_3\sqrt{\omega_z}\ z\right)} \\ &\qquad \times\psi_0\Big(x + \sqrt{\frac{2}{\omega}}\mathrm{Im}[z_1], y + \sqrt{\frac{2}{\omega}}\mathrm{Im}[z_2], z + \sqrt{\frac{2}{\omega_z}}\mathrm{Im}[z_3]\Big). \end{aligned}$$

Hubieramos llegado al mismo resultado sustituyendo directamente en la ecuación 4.48.

Por otro lado, igualando a cero el valor esperado de los operadores B_i y $B_i^\dagger$ en el estado extremal, obtenemos el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} -i\omega\langle X\rangle_0 + \langle P_x\rangle_0 = 0, &\qquad i\omega\langle X\rangle_0 + \langle P_x\rangle_0 = 0, \\ -i\omega\langle Y\rangle_0 + \langle P_y\rangle_0 = 0, &\qquad i\omega\langle Y\rangle_0 + \langle P_y\rangle_0 = 0, \\ -i\omega_z\langle Z\rangle_0 + \langle P_z\rangle_0 = 0, &\qquad i\omega_z\langle Z\rangle_0 + \langle P_z\rangle_0 = 0, \end{aligned}$$

cuya solución está dada por los siguientes valores esperados

$$\begin{array}{lll} \langle X\rangle_0 = 0, & \langle Y\rangle_0 = 0, & \langle Z\rangle_0 = 0, \\ \langle P_x\rangle_0 = 0, & \langle P_y\rangle_0 = 0, & \langle P_z\rangle_0 = 0. \end{array}$$

Un sistema de ecuaciones similar, pero para los productos cuadráticos entre operadores B_i y $B_j^\dagger$, nos lleva directamente a

$$\begin{array}{lll} \langle X^2\rangle_0 = \frac{1}{2\omega}, & \langle P_x^2\rangle_0 = \frac{\omega}{2}, & \langle XP_x\rangle_0 = \frac{i}{2}, \\ \langle Y^2\rangle_0 = \frac{1}{2\omega}, & \langle P_y^2\rangle_0 = \frac{\omega}{2}, & \langle YP_y\rangle_0 = \frac{i}{2}, \\ \langle Z^2\rangle_0 = \frac{1}{2\omega_z}, & \langle P_z^2\rangle_0 = \frac{\omega_z}{2}, & \langle ZP_z\rangle_0 = \frac{i}{2}, \end{array} \tag{5.21}$$

mientras que

$$\begin{array}{c} \langle XY\rangle_0 = \langle XZ\rangle_0 = \langle YZ\rangle_0 = \langle P_xP_y\rangle_0 = \langle P_xP_z\rangle_0 = \langle P_yP_z\rangle_0 = 0, \\ \langle XP_y\rangle_0 = \langle XP_z\rangle_0 = \langle YP_x\rangle_0 = \langle YP_z\rangle_0 = \langle ZP_x\rangle_0 = \langle ZP_y\rangle_0 = 0. \end{array}$$

Siguiendo las ecuaciones 4.53, 4.57, tendremos

$$\begin{array}{ccc} \langle X\rangle_z = -\sqrt{\frac{2}{\omega}}\ \mathrm{Im}[z_1], & \langle Y\rangle_z = -\sqrt{\frac{2}{\omega}}\ \mathrm{Im}[z_2], & \langle Z\rangle_z = -\sqrt{\frac{2}{\omega_z}}\ \mathrm{Im}[z_3], \\ \langle P_x\rangle_z = \sqrt{2\omega}\ \mathrm{Re}[z_1], & \langle P_y\rangle_z = \sqrt{2\omega}\ \mathrm{Re}[z_2], & \langle P_z\rangle_z = \sqrt{2\omega_z}\ \mathrm{Re}[z_3], \end{array}$$

en tanto que 4.55 y 4.58 nos llevan a

$$\begin{array}{rcll} \langle X^2\rangle_z &=& \frac{1}{2\omega}\big(1+4\mathrm{Im}^2[z_1]\big), & \langle P_x^2\rangle_z = \frac{\omega}{2}\big(1+4\mathrm{Re}^2[z_1]\big), \\ \langle Y^2\rangle_z &=& \frac{1}{2\omega}\big(1+4\mathrm{Im}^2[z_2]\big), & \langle P_y^2\rangle_z = \frac{\omega}{2}\big(1+4\mathrm{Re}^2[z_2]\big), \\ \langle Z^2\rangle_z &=& \frac{1}{2\omega_z}\big(1+4\mathrm{Im}^2[z_3]\big), & \langle P_z^2\rangle_z = \frac{\omega_z}{2}\big(1+4\mathrm{Re}^2[z_3]\big). \end{array}$$

Podemos obtener también

$$\begin{array}{ccc} (\Delta X)_z^2 = \frac{1}{2\omega}, & (\Delta Y)_z^2 = \frac{1}{2\omega}, & (\Delta Z)_z^2 = \frac{1}{2\omega_z}, \\ (\Delta P_x)_z^2 = \frac{\omega}{2}, & (\Delta P_y)_z^2 = \frac{\omega}{2}, & (\Delta P_z)_z^2 = \frac{\omega_z}{2}, \end{array}$$

es decir, se minimizan las relaciones de incertidumbre de Heisenberg

$$(\Delta X)_z(\Delta P_x)_z = \frac{1}{2}, \qquad (\Delta Y)_z(\Delta P_y)_z = \frac{1}{2}, \qquad (\Delta Z)_z(\Delta P_z)_z = \frac{1}{2}, \tag{5.22}$$

que es lo que se espera para los estados coherentes estándar.

5.3. Trampa de Penning

En esta sección estudiaremos a una partícula sin espín de carga e dentro de una trampa de Penning, es decir, sujeta a un campo magnético uniforme constante y a un potencial cuadrupolar eléctrico. Por simplicidad, supondremos que la masa de la partícula es igual a 1. Entonces, su Hamiltoniano estará dado por

$$H = \frac{1}{2}\big(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{X})\big)^2 + e\Phi(\vec{X}), \tag{5.23}$$

donde el campo magnético está representado por el potencial vectorial

$$\vec{A}(\vec{X}) = -\frac{1}{2}\vec{X} \times \vec{B}, \tag{5.24}$$

con $\vec{B} = B\hat{k}$ y tomaremos el potencial escalar como

$$\Phi(\vec{X}) = \Phi_0(X^2 + Y^2 - 2z^2). \tag{5.25}$$

Podemos ahora llevar nuestro Hamiltoniano a la forma

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{P}^2}{2} - \left(\frac{eB}{2c}\right)L_z + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{eB}{2c}\right)^2(X^2+Y^2) + 2e\Phi_0(X^2+Y^2-2Z^2)\right\} \\ &= \frac{\vec{P}^2}{2} + b_0L_z + \frac{1}{2}\Big(b_0^2(X^2+Y^2) + v_0(X^2+Y^2) - 2v_0Z^2\Big), \end{aligned} \tag{5.26}$$

donde $b_0 = -\frac{eB}{2c}$ y $v_0 = 2e\Phi_0$. Es claro que podemos llegar de la ecuación 3.1, con el potencial de la forma dada en 3.2, al Hamiltoniano anterior si tomamos

$$v_1 = -2v_0 = -4e\Phi_0. \tag{5.27}$$

Por lo tanto, la matriz $\mathbf{\Lambda}$ en este caso se reduce a

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -b_0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(b_0^2+v_0) & 0 & 0 & 0 & -b_0 & 0 \\ 0 & -(b_0^2+v_0) & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2v_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.28}$$

cuyos eigenvalores están dados por $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$ y $\pm\lambda_3$, con

$$\lambda_1 = \sqrt{2v_0}, \tag{5.29}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{-\left(b_0 + \sqrt{b_0^2 + v_0}\right)^2}, \tag{5.30}$$

$$\lambda_3 = \sqrt{-\left(b_0 - \sqrt{b_0^2 + v_0}\right)^2}. \tag{5.31}$$

Para analizar este ejemplo, nos restringiremos nuevamente a eigenvalores de $\boldsymbol{\Lambda}$ puramente imaginarios, es decir, necesitamos que

$$v_0 < 0. \tag{5.32}$$

Además, pediremos que tanto $b_0 + \sqrt{b_0^2 + v_0}$ como $b_0 - \sqrt{b_0^2 + v_0}$ sean reales. Para esto exigimos que $b_0^2 + v_0 > 0$, es decir, nos restringiremos a los valores de b_0 y v_0 que cumplan con

$$|b_0| > \sqrt{|v_0|}. \tag{5.33}$$

Ahora sólo nos resta analizar los valores absolutos $\left|b_0 \pm \sqrt{b_0^2 + v_0}\right|$. Definiendo

$$\begin{aligned} \omega_+ &= b_0 + \sqrt{b_0^2 + v_0}, \\ \omega_- &= b_0 - \sqrt{b_0^2 + v_0}, \end{aligned}$$

vemos que si b_0 es positivo, con 5.32 y 5.33 tendremos $\omega_\pm > 0$. Sin embargo, para b_0 negativo, $\omega_\pm$ serán negativos y por tanto llegaremos a dos casos:

$$\begin{array}{llll} b_0 > 0, & \lambda_1 = i\sqrt{-2v_0}, & \lambda_2 = i\omega_+, & \lambda_3 = i\omega_-, \\ b_0 < 0, & \hat{\lambda}_1 = i\sqrt{-2v_0}, & \hat{\lambda}_2 = -i\omega_+, & \hat{\lambda}_3 = -i\omega_-. \end{array} \tag{5.34}$$

Por tanto, sólo necesitamos las restricciones 5.32 y 5.33 para poder aplicar la teoría de la sección 3.2.

Analizando primero el caso $b_0 > 0$, obtendremos los siguientes eigenvectores normalizados

$$\begin{aligned} |u_1\rangle &= \frac{1}{2t_1}\left(0, 0, -\frac{i}{\sqrt{-2v_0}}, 0, 0, 1\right), \\ |u_2\rangle &= \frac{1}{4t_2}\left(\frac{1}{\sqrt{b_0^2 + v_0}}, -\frac{i}{\sqrt{b_0^2 + v_0}}, 0, i, 1, 0\right), \\ |u_3\rangle &= \frac{1}{4t_3}\left(-\frac{1}{\sqrt{b_0^2 + v_0}}, \frac{i}{\sqrt{b_0^2 + v_0}}, 0, i, 1, 0\right), \end{aligned}$$

y sus complejos conjugados $|u_1^*\rangle = (|u_1\rangle)^*$, $|u_2^*\rangle = (|u_2\rangle)^*$ y $|u_3^*\rangle = (|u_3\rangle)^*$, con t_1, t_2 y t_3 constantes complejas. Mientras tanto, las eigenformas están dadas por

$$\begin{aligned}
\langle e_1| &= t_1\Big(0,0,i\sqrt{-2v_0},0,0,1\Big),\\
\langle e_2| &= t_2\Big(\sqrt{b_0^2+v_0},i\sqrt{b_0^2+v_0},0,-i,1,0\Big),\\
\langle e_3| &= t_3\Big(-\sqrt{b_0^2+v_0},-i\sqrt{b_0^2+v_0},0,-i,1,0\Big),
\end{aligned}$$

y las correspondientes conjugadas $\langle e_1^*| = (\langle e_1|)^*$, $\langle e_2^*| = (\langle e_2|)^*$ y $\langle e_3^*| = (\langle e_3|)^*$.

Si definimos ahora los operadores $L_k^\pm$ como $L_k^+ = \langle e_k|q\rangle$ y $L_k^- = \langle e_k^*|q\rangle$ para $k = 1,2,3$, obtendremos las relaciones de conmutación siguientes

$$\begin{aligned}
[L_1^-,L_1^+] &= 2|t_1|^2\sqrt{-2v_0},\\
[L_2^-,L_2^+] &= 4|t_2|^2\sqrt{b_0^2+v_0},\\
[L_3^-,L_3^+] &= -4|t_3|^2\sqrt{b_0^2+v_0}.
\end{aligned}$$

Por tanto, siguiendo la ecuación 3.20 podremos escribir el Hamiltoniano en la forma

$$H = \frac{1}{2|t_1|^2}L_1^+L_1^- + \frac{b_0+\sqrt{b_0^2+v_0}}{4|t_2|^2\sqrt{b_0^2+v_0}}L_2^+L_2^- - \frac{b_0-\sqrt{b_0^2+v_0}}{4|t_3|^2\sqrt{b_0^2+v_0}}L_3^+L_3^- + g_0, \tag{5.35}$$

donde $g_0 = \sqrt{\frac{-v_0}{2}} + b_0$.

Notemos, por otro lado, que los valores

$$\gamma_j = \frac{[L_j^-,L_j^+]}{\big|[L_j^-,L_j^+]\big|}, \qquad j = 1,2,3,$$

están dados por

$$\gamma_1 = 1, \qquad \gamma_2 = 1, \qquad \gamma_3 = -1, \tag{5.36}$$

es decir, según las definiciones 4.2, ahora debemos tomar

$$B_1 = \frac{L_1^-}{\sqrt{\big|[L_1^-,L_1^+]\big|}}, \qquad B_2 = \frac{L_2^-}{\sqrt{\big|[L_2^-,L_2^+]\big|}}, \qquad B_3 = \frac{L_3^+}{\sqrt{\big|[L_3^-,L_3^+]\big|}}. \tag{5.37}$$

Siguiendo la definición 4.11, identificamos los vectores

$$
\begin{aligned}
\vec{\alpha_1} &= -\frac{it_1^*}{|t_1|\sqrt{2}(-2v_0)^{1/4}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\vec{\alpha_2} &= \frac{t_2^*}{2|t_2|(b_0^2+v_0)^{1/4}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\vec{\alpha_3} &= -\frac{t_3}{2|t_3|(b_0^2+v_0)^{1/4}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\vec{\beta_1} &= -\frac{it_1^*}{|t_1|\sqrt{2}}(-2v_0)^{1/4}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\vec{\beta_2} &= \frac{t_2^*}{2|t_2|}(b_0^2+v_0)^{1/4}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\vec{\beta_3} &= -\frac{t_3}{2|t_3|}(b_0^2+v_0)^{1/4}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

Por tanto, la matriz $\mathbf{a}$ se expresa como

$$
\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{b_0^2+v_0} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b_0^2+v_0} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-2v_0} \end{pmatrix}. \tag{5.40}
$$

Con esto, se puede obtener la forma de la función de onda extremal dada en la ecuación 4.9, lo que nos lleva a

$$
\psi_0(\vec{x}) = ce^{-\frac{1}{2}\sqrt{b_0^2+v_0}(x^2+y^2)}e^{-\sqrt{\frac{-v_0}{2}}\ z^2}. \tag{5.41}
$$

De aquí se puede calcular cualquier eigenfunción de H

$$
\psi_{n_1,n_2,n_3}(\vec{x}) = c\frac{B_1^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{B_2^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}\frac{B_3^{n_3}}{\sqrt{n_3!}}\ e^{-\frac{1}{2}\sqrt{b_0^2+v_0}(x^2+y^2)}e^{-\sqrt{\frac{-v_0}{2}}\ z^2}. \tag{5.42}
$$

Pasemos ahora a desarrollar el operador de desplazamiento en este caso. Según la ecuación 4.44, $D(z)$ se obtiene en términos de los vectores $\vec{\Gamma}$ y $\vec{\Sigma}$ definidos como

$$\vec{\Gamma} \equiv 2\mathrm{Re}[z_1^*\vec{\alpha_1} + z_2^*\vec{\alpha_2} + z_3^*\vec{\alpha_3}] = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\Sigma} \equiv -2\mathrm{Im}[z_1^*\vec{\beta_1} + z_2^*\vec{\beta_2} + z_3^*\vec{\beta_3}] = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Por componentes tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (b_0^2 + v_0)^{-\frac{1}{4}} \left(\mathrm{Re}[z_2 - z_3]\right), \\ \Gamma_2 &= -(b_0^2 + v_0)^{-\frac{1}{4}} \left(\mathrm{Im}[z_2 + z_3]\right), \\ \Gamma_3 &= -\sqrt{2}(-2v_0)^{-\frac{1}{4}}\ \mathrm{Im}[z_1], \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= (b_0^2 + v_0)^{1/4}\ \left(\mathrm{Im}[z_2 - z_3]\right), \\ \Sigma_2 &= (b_0^2 + v_0)^{1/4}\ \left(\mathrm{Re}[z_2 + z_3]\right), \\ \Sigma_3 &= \sqrt{2}(-2v_0)^{1/4}\mathrm{Re}[z_1], \end{aligned} \tag{5.44}$$

donde hemos tomado por simplicidad las fases de t_1, t_2 y t_3 iguales a cero.

Calcularemos los productos en términos de los cuales se expresa el operador $D(z)$ en la ecuación 4.44. Vemos primero que

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{\Sigma} = -2\big(\mathrm{Re}[z_1]\mathrm{Im}[z_1] + \mathrm{Re}[z_2]\mathrm{Im}[z_3] + \mathrm{Re}[z_3]\mathrm{Im}[z_2]\big). \tag{5.45}$$

Además podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma} \cdot \vec{X} = (b_0^2 + v_0)^{1/4}\Big\{ \big(\mathrm{Im}[z_2 - z_3]\big)X + \big(\mathrm{Re}[z_2 + z_3]\big)Y \Big\} \\ + \sqrt{2}(-2v_0)^{1/4}\mathrm{Re}[z_1]Z, \end{aligned} \tag{5.46}$$

y

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} \cdot \vec{P} = \frac{1}{(b_0^2 + v_0)^{1/4}}\Big\{ \big(\mathrm{Re}[z_2 - z_3]\big)P_x - \big(\mathrm{Im}[z_2 + z_3]\big)P_y \Big\} \\ - \frac{\sqrt{2}}{(-2v_0)^{1/4}}\mathrm{Im}[z_1]P_z. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación 4.44 obtenemos la forma explícita del operador de desplazamiento.

$$D(z) = C(z)F(\vec{X})e^{-\frac{i}{(b_0^2+v_0)^{1/4}}\Big\{(\mathrm{Re}[z_2-z_3])P_x-(\mathrm{Im}[z_2+z_3])P_y\Big\}+\frac{i\sqrt{2}}{(-2v_0)^{1/4}}\mathrm{Im}[z_1]P_z},$$

donde tomamos

$$\begin{aligned} C(z) &= C(z_1,z_2,z_3) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\Gamma}\cdot\vec{\Sigma}} \\ &= e^{i\Big(\mathrm{Re}[z_1]\mathrm{Im}[z_1]+\mathrm{Re}[z_2]\mathrm{Im}[z_3]+\mathrm{Re}[z_3]\mathrm{Im}[z_2]\Big)}, \end{aligned} \tag{5.48}$$

y hemos definido la función

$$\begin{aligned} F(\vec{X}) &= e^{i\vec{\Sigma}\cdot\vec{X}} \\ &= e^{i(b_0^2+v_0)^{1/4}\Big\{\Big(\mathrm{Im}[z_2-z_3]\Big)X+\Big(\mathrm{Re}[z_2+z_3]\Big)Y\Big\}+i\sqrt{2}\ (-2v_0)^{1/4}\mathrm{Re}[z_1]Z}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Así, la forma explícita de los estados coherentes será

$$\phi_z(\vec{x}) = C(z)F(\vec{x})\psi_0\bigg(x - \frac{\mathrm{Re}[z_2-z_3]}{(b_0^2+v_0)^{1/4}}, y + \frac{\mathrm{Im}[z_2+z_3]}{(b_0^2+v_0)^{1/4}}, z + \frac{\sqrt{2}\ \mathrm{Im}[z_1]}{(-2v_0)^{1/4}}\bigg),$$

donde $\psi_0(\vec{x})$ esta dada por la ecuación 5.41.

Como en los ejemplos anteriores, podemos calcular los valores esperados de X_i y P_i para los estados coherentes en términos de las cantidades correspondientes en el estado extremal $|\psi_0\rangle$. Así, sólo debemos sustituir en las ecuaciones 4.53 y 4.57, los valores que obtengamos para $\langle X_i\rangle_0$ y $\langle P_i\rangle_0$ a partir del sistema de ecuaciones formado al tomar

$$\langle B_i\rangle_0 = 0, \qquad \langle B_i^\dagger\rangle_0 = 0, \qquad i = 1,2,3. \tag{5.50}$$

En este caso se obtiene

$$\langle X_i\rangle_0 = \langle P_i\rangle_0 = 0, \qquad i = 1,2,3, \tag{5.51}$$

y por tanto las ecuaciones 4.53 y 4.57 nos llevan a

$$\langle X_j\rangle_z = \Gamma_j, \qquad \langle P_j\rangle_z = \Sigma_j.$$

Estas expresiones ya están desarrolladas en las ecuaciones 5.43 y 5.44.

Ahora, también buscamos los valores esperados de los productos cuadráticos entre los operadores canónicos, en especial $\langle X_i^2\rangle_z$ y $\langle P_i^2\rangle_z$ con $i = 1,2,3$

para poder calcular las desviaciones cuadráticas medias $(\Delta X_i)^2_z$ y $(\Delta P_i)^2_z$. Según las ecuaciones 4.55 y 4.58, sólo necesitamos calcular los valores esperados en el estado extremal $|\psi_0\rangle$, por lo cual nuevamente recurrimos a los valores esperados de los productos entre los operadores de escalera en dicho estado. Así obtendremos un sistema de 21 ecuaciones y el mismo número de incognitas, como resultado de multiplicar por pares los 6 operadores. Con este método obtendremos

$$\begin{aligned}
\langle X^2\rangle_0 &= \langle Y^2\rangle_0 = \frac{1}{2\sqrt{b_0^2+v_0}}, \qquad \langle Z^2\rangle_0 = \frac{1}{2\sqrt{-2v_0}}, \\
\langle P_x^2\rangle_0 &= \langle P_y^2\rangle_0 = \frac{\sqrt{b_0^2+v_0}}{2}, \qquad \langle P_z^2\rangle_0 = \frac{\sqrt{-2v_0}}{2}.
\end{aligned}$$

mientras que

$$\langle XP_x\rangle_0 = \langle YP_y\rangle_0 = \langle ZP_z\rangle_0 = \frac{i}{2}.$$

Los demás valores esperados que se obtienen del sistema de ecuaciones son identicamente cero.

Por tanto, las ecuaciones 4.56 y 4.59 nos llevan a obtener

$$\begin{aligned}
(\Delta X)^2_z = (\Delta Y)^2_z &= \frac{1}{2\sqrt{b_0^2+v_0}}, \qquad (\Delta Z)^2_z = \frac{1}{2\sqrt{-2v_0}}, \\
(\Delta P_x)^2_z = (\Delta P_y)^2_z &= \frac{\sqrt{b_0^2+v_0}}{2}, \qquad (\Delta P_z)^2_z = \frac{\sqrt{-2v_0}}{2},
\end{aligned}$$

y se puede ver que se cumplen las relaciones de mínima incertidumbre

$$(\Delta X)_z(\Delta P_x)_z = \frac{1}{2}, \qquad (\Delta Y)_z(\Delta P_y)_z = \frac{1}{2}, \qquad (\Delta Z)_z(\Delta P_z)_z = \frac{1}{2},$$

como se ha obtenido en los ejemplos anteriores.

Analizando ahora el caso $b_0 < 0$, encontramos grandes similitudes con el anterior. Notemos primero que

$$\hat{\lambda}_1 = \lambda_1, \qquad \hat{\lambda}_2 = -\lambda_2, \qquad \hat{\lambda}_3 = -\lambda_3. \tag{5.52}$$

Entonces tendremos

$$\begin{aligned}
&|\hat{u}_1\rangle = |u_1\rangle, && |\hat{u}_1^*\rangle = |u_1^*\rangle, && \langle\hat{e}_1| = \langle e_1|, && \langle\hat{e}_1^*| = \langle e_1^*|, \\
&|\hat{u}_2\rangle = |u_2^*\rangle, && |\hat{u}_2^*\rangle = |u_2\rangle, && \langle\hat{e}_2| = \langle e_2^*|, && \langle\hat{e}_2^*| = \langle e_2|, \\
&|\hat{u}_3\rangle = |u_3^*\rangle, && |\hat{u}_3^*\rangle = |u_3\rangle, && \langle\hat{e}_3| = \langle e_3^*|, && \langle\hat{e}_3| = \langle e_3^*|.
\end{aligned}$$

Por tanto, los operadores $\hat{L}^{\pm}$ quedarán definidos como

$$\hat{L}_1^+ = \langle \hat{e}_1 | q \rangle = L_1^+, \qquad \hat{L}_2^+ = \langle \hat{e}_2 | q \rangle = L_2^-, \qquad \hat{L}_3^+ = \langle \hat{e}_3 | q \rangle = L_3^-,$$
$$\hat{L}_1^- = \langle \hat{e}_1^* | q \rangle = L_1^-, \qquad \hat{L}_2^- = \langle \hat{e}_2^* | q \rangle = L_2^+, \qquad \hat{L}_3^- = \langle \hat{e}_3^* | q \rangle = L_3^+.$$

En términos de estos operadores, con ayuda de la ecuación 4.5 y partiendo de 5.35, podemos escribir H como

$$H = \tfrac{1}{2|t_1|^2} \hat{L}_1^+ \hat{L}_1^- + \tfrac{b_0 + \sqrt{b_0^2 + v_0}}{4|t_2|^2 \sqrt{b_0^2 + v_0}} \hat{L}_2^+ \hat{L}_2^- - \tfrac{b_0 - \sqrt{b_0^2 + v_0}}{4|t_3|^2 \sqrt{b_0^2 + v_0}} \hat{L}_3^+ \hat{L}_3^- + \hat{g}_0, \quad (5.53)$$

donde $\hat{g}_0 = \sqrt{\frac{-v_0}{2}} - b_0$.

Por otro lado, tendremos los conmutadores

$$\begin{aligned} [\hat{L}_1^-, \hat{L}_1^+] &= 2|t_1|^2 \sqrt{2|v_0|}, \\ [\hat{L}_2^-, \hat{L}_2^+] &= -4|t_2|^2 \sqrt{b_0^2 + v_0}, \\ [\hat{L}_3^-, \hat{L}_3^+] &= 4|t_3|^2 \sqrt{b_0^2 + v_0}, \end{aligned}$$

es decir, ahora

$$\gamma_1 = 1, \qquad \gamma_2 = -1, \qquad \gamma_3 = 1, \quad (5.54)$$

de modo que las ecuaciones 4.2 nos llevan a elegir para este caso

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 &= \frac{\hat{L}_1^-}{\sqrt{\left|[\hat{L}_1^-, \hat{L}_1^+]\right|}} = \frac{L_1^-}{\sqrt{\left|[L_1^-, L_1^+]\right|}} = B_1, \\ \hat{B}_2 &= \frac{\hat{L}_2^+}{\sqrt{\left|[\hat{L}_2^-, \hat{L}_2^+]\right|}} = \frac{L_2^-}{\sqrt{\left|[L_2^-, L_2^+]\right|}} = B_2, \\ \hat{B}_3 &= \frac{\hat{L}_3^-}{\sqrt{\left|[\hat{L}_3^-, \hat{L}_3^+]\right|}}, = \frac{L_3^+}{\sqrt{\left|[L_3^-, L_3^+]\right|}} = B_3. \end{aligned}$$

Esto significa que los operadores $\hat{B}_k$ del caso $b_0 < 0$ coinciden con los correspondientes B_k para $b_0 > 0$, $k = 1, 2, 3$. Así, el resto del tratamiento es exactamente igual, lo cual incluye tanto a las expresiones explícitas de la función de onda extremal $\psi_0(\vec{x})$ y de los estados coherentes $\phi_z(\vec{x})$ como a los valores esperados de los operadores canónicos. Lo anterior incluye también la minimización de la relación de incertidumbre de Heisenberg.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo encontramos explícitamente los estados coherentes de sistemas descritos por Hamiltonianos cuadráticos cuya forma está dada en la ecuación 3.1. Para lograrlo fuimos capaces de determinar operadores análogos a los de creación y aniquilación del oscilador armónico. En el régimen de desconfinamiento se encontró que estos nuevos operadores, mediante una técnica algebraica similar a la del oscilador, podrían generar eigenvectores con eigenvalor complejo lo cual no puede ocurrir ya que H es hermitiano. Esto implica que, en este régimen, no existen estados estacionarios asociados a H. Al restringirnos a sistemas confinados espacialmente fue posible obtener tales estados estacionarios y, en particular, la forma explícita de la función de onda del estado extremal.

Asimismo mostramos que, para sistemas regidos por los Hamiltonianos en cuestión, las definiciones de estados coherentes dadas por las ecuaciones 1.1 y 1.3 son equivalentes. Así, desarrollamos el operador de desplazamiento y, a partir de éste, obtuvimos la forma explícita de los estados coherentes en términos de la función de onda del estado extremal del sistema.

Es importante notar que este desarrollo proporciona un método algebraico directo, a partir de un sistema de ecuaciones lineales, para obtener los valores esperados de los operadores de posición y momento en un estado coherente arbitrario, así como de los productos cuadráticos entre estos. Cuando menos para los ejemplos presentados, encontramos que los estados coherentes así derivados minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg para X_i, P_i.

Es interesante mencionar específicamente a la trampa de Penning, para la cual nuestro tratamiento algebraico permite concluir de manera directa que el

Hamiltoniano correspondiente no es un operador definido positivo, debido al signo de γ que se obtiene en uno de los modos en los cuales se descompone H. Este fenómeno ya ha sido observado en el pasado para operadores que juegan un papel análogo al Hamiltoniano en sistemas de referencia no inerciales. Como podemos ver con este ejemplo, tal propiedad puede surgir también para Hamiltonianos en sistemas de referencia inerciales.

Apéndice A

Técnicas matemáticas

Sea $\mathbf{\Lambda}$ una matriz $n \times n$ diagonalizable no necesariamente hermítica, con entradas reales [20]. Sean

$$|u_i\rangle = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{pmatrix}, \qquad \langle e_i| = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}), \tag{A.1}$$

los eigenvectores y eigenformas de $\mathbf{\Lambda}$ correspondientes al eigenvalor λ_i. Suponiendo que los eigenvalores λ_i no se repiten tendremos eigenvectores y eigenformas linealmente independientes. Definamos las matrices $\mathbf{U}$ y $\mathbf{E}$, formadas por las columnas $|u_i\rangle$ y los renglones $\langle e_i|$ respectivamente.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \ldots & & \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \ldots & & \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Tendremos entonces que

$$\mathbf{\Lambda U} = \mathbf{U}\boldsymbol{\lambda}, \tag{A.3}$$

y

$$\mathbf{E\Lambda} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{E}, \tag{A.4}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es la matriz diagonal formada por los eigenvalores de $\boldsymbol{\Lambda}$,

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

Si multiplicamos entonces la ecuación A.3 a la izquierda por $\mathbf{E}$ y A.4 a la derecha por $\mathbf{U}$ tendremos $\mathbf{EU}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{EU}$. Ya que los λ_i son diferentes entre sÍ, es fácil ver que $\mathbf{EU}$ tiene que ser una matriz diagonal que denotaremos por $\mathbf{D} = \mathbf{EU}$. Ahora, ya que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{E}$ son invertibles podemos escribir $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{E}^{-1}$ y como $\mathbf{U} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}$, tenemos $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}$, es decir $\mathbf{1} = \mathbf{UU}^{-1} = \mathbf{U}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E})$. Definiendo las matrices $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{UD}^{-1}$ y $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{E}$ se satisface que

$$\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\chi} = \mathbf{1}, \qquad \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{EUD}^{-1} = \mathbf{DD}^{-1} = \mathbf{1}. \tag{A.6}$$

Analizando cuidadosamente la matriz $\mathbf{D}$, vemos que cada una de sus entradas tiene la forma del producto escalar $d_{ij} = \langle e_i | u_j \rangle$. Como $\mathbf{D}$ es diagonal, tendremos que $\langle e_i | u_j \rangle \propto \delta_{ij}$, esto es, los eigenvectores y las eigenformas son ortogonales entre sí cuando corresponden a distinto eigenvalor.

Además, ya que las componentes d_{jj} de la diagonal de la matriz $\mathbf{D}$ son de la forma $d_{jj} = \langle e_j | u_j \rangle$ tendremos que $(d^{-1})_{jj} = \frac{1}{\langle e_j | u_j \rangle}$ y así las entradas de la matriz $\boldsymbol{\psi}$ serán de la forma

$$\psi_{ij} = \frac{u_{ij}}{\langle e_j | u_j \rangle}.$$

Por tanto, las entradas del producto $\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\chi}$ estarán dadas como

$$(\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\chi})_{im} = \sum_j \psi_{ij}\chi_{jm} = \sum_j \frac{u_{ij}}{\langle e_j | u_j \rangle}(E)_{jm} = \sum_j \frac{u_{ij}e_{jm}}{\langle e_j | u_j \rangle}.$$

Entonces, normalizando de modo que $\langle e_j | u_j \rangle = 1$, para todo j, la primera ecuación en A.6 nos lleva a

$$\sum_j u_{ij}e_{jm} = \delta_{im},$$

esto es,

$$\sum_j |u_j\rangle\langle e_j| = \mathbf{1}. \tag{A.7}$$

Así, los eigenestados y las eigenformas de la matriz $\boldsymbol{\Lambda}$ generan el espacio completo.

Apéndice B

Evolución temporal

En el cuadro de Heisenberg, la evolución temporal de un operador $\mathcal{O}(t)$ que en el cuadro de Schrödinger no depende explícitamente del tiempo, para un sistema descrito por un Hamiltoniano H, está dada por la ecuación

$$\frac{d}{dt}\mathcal{O}(t) = [iH, \mathcal{O}(t)]. \tag{B.1}$$

Consideremos un Hamiltoniano cuadrático de la forma

$$H = \frac{1}{2}\eta^T \mathbf{B}\eta + d$$

con[1] $\eta = \begin{pmatrix} \vec{X}(t) \\ \vec{P}(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}$ una matriz $2n \times 2n$ real y simétrica de entradas costantes y d un número real. Entonces, se llega fácilmente a que el conmutador de la ecuación B.1 para el vector de operadores η puede escribirse como el producto matricial

$$[iH, \eta] = \mathbf{J}\mathbf{B}\eta, \tag{B.2}$$

donde $\mathbf{J}$ es la conocida matriz

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.3}$$

en la cual $\mathbf{1}$ representa la matriz identidad $n \times n$. Por su forma $\mathbf{J}$ cumple que

$$\mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \qquad \mathbf{J}^2 = -\mathbf{1}. \tag{B.4}$$

[1]En este apéndice utilizaremos una notación distinta a la del texto con el fin de evitar posibles confusiones.

Entonces, la matriz $\mathbf{\Lambda}$ definida en el texto como aquella que cumple la relación $[iH, \eta] = \mathbf{\Lambda}\eta$, tendrá la forma

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{JB}.$$

Por tanto, la ecuación B.1 para el vector η será

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \mathbf{JB}\eta(t) = \mathbf{\Lambda}\eta(t), \tag{B.5}$$

cuya solución está dada como

$$\eta(t) = e^{\mathbf{\Lambda}t}\eta(0) = e^{\mathbf{\Lambda}t}\eta_0. \tag{B.6}$$

Además, tendremos que el polinomio característico de la matriz $\mathbf{\Lambda}$, $P(\lambda) = |\mathbf{\Lambda} - \lambda|$, se puede escribir como

$$P(\lambda) = |\mathbf{JB} - \lambda|. \tag{B.7}$$

Usando ahora las propiedades B.4, así como las conocidas para determinantes y matrices simétricas, se llega a que

$$|\mathbf{JB} - \lambda| = |\mathbf{JB} + \lambda|, \tag{B.8}$$

es decir, $P(\lambda) = P(-\lambda)$. Por tanto, si λ es raíz del polinomio característico, esto es eigenvalor de $\mathbf{\Lambda}$, también lo será $-\lambda$. Así, podemos etiquetar los eigenestados y las eigenformas, correspondientes a los eigenvalores λ_j y $-\lambda_j$, como $|u_j^{\pm}\rangle$ y $\langle e_j^{\pm}|$ respectivamente.

Ahora, según el apéndice A, normalizando adecuadamente se llega a la ecuación A.7, que en este caso toma la forma

$$\mathbf{1} = \sum_j \left(|u_j^+\rangle\langle e_j^+| + |u_j^-\rangle\langle e_j^-| \right). \tag{B.9}$$

Por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \eta(t) &= e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{1}\eta_0 = e^{\mathbf{\Lambda}t}\sum_j \left(|u_j^+\rangle\langle e_j^+| + |u_j^-\rangle\langle e_j^-| \right)\eta_0 \\ &= \sum_j \left(e^{\lambda_j t}|u_j^+\rangle\langle e_j^+|\eta_0 + e^{-\lambda_j t}|u_j^-\rangle\langle e_j^-|\eta_0 \right) \\ &= \sum_j \left(e^{\lambda_j t}|u_j^+\rangle\mathcal{L}_j^+ + e^{-\lambda_j t}|u_j^-\rangle\mathcal{L}_j^- \right), \end{aligned} \tag{B.10}$$

donde definimos los operadores $\mathcal{L}_j^{\pm}$ como el producto $\langle e_j^{\pm}|\eta_0$. Por tanto, la evolución temporal de $\eta(t)$ estará definida por los valores que tomen los λ_k's, los cuales en general serán complejos. Vemos que si λ_k tiene su parte real distinta de cero, ya sea positiva o negativa, alguno de los coeficientes exponenciales de la expresión anterior diverge conforme t crece y por tanto el movimiento clásico no será acotado. La única forma en que esto no ocurra es que todos los eigenvalores λ_k sean puramente imaginarios, de modo que los coeficientes sean exponenciales imaginarios en el tiempo, induciendo así oscilaciones de los coeficientes entre los valores $\mathcal{L}_k^{\pm}$ y $-\mathcal{L}_k^{\pm}$ conforme avanza el tiempo. Entonces, la evolución temporal del vector $\eta(t)$ quedará definida por los valores iniciales de posición y momento dados en $\mathcal{L}_k^{+}$ y $\mathcal{L}_k^{-}$, manteniendose siempre acotada.

Apéndice C

Estado extremal

Sean $B_1, ...B_n$ un sistema de n operadores diferenciales en el espacio $C^2(\mathbb{R}^n)$, donde cada uno es una combinación lineal de los $2n$ operadores canónicos X_j $P_j = -i\partial_j$, y sean $B_1^\dagger, \ldots, B_n^\dagger$ sus operadores adjuntos. Si se satisfacen las relaciones de conmutación

$$[B_j, B_k] = 0, \tag{C.1}$$

$$[B_j, B_k^\dagger] = \delta_{jk}, \qquad j, k = 1, \ldots, n, \tag{C.2}$$

el sistema de n ecuaciones diferenciales

$$B_j \psi_0(\vec{x}) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{C.3}$$

tiene solución cuadrado integrable.

Para demostrarlo vemos primero que, de acuerdo a lo que hemos asumido, los operadores B_j y $B_j^\dagger$ tienen la forma

$$B_j = i\vec{P} \cdot \vec{\alpha_j} + \vec{X} \cdot \vec{\beta_j}, \quad B_j^\dagger = -i\vec{\alpha_j}^\dagger \cdot \vec{P} + \vec{\beta_j}^\dagger \cdot \vec{X}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{C.4}$$

donde $\vec{\alpha_j}$, $\vec{\beta_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ son vectores de n componentes complejas. Notemos que los vectores $\vec{\alpha_j}$ son linealmente independientes. De hecho, supongamos que $c_1, \ldots, c_n$ son numeros complejos tales que $c_1\vec{\alpha_1} + \cdots + c_n\vec{\alpha_n} = 0$. Podemos definir por tanto los operadores $B = c_1B_1 + \cdots + c_nB_n$ y $B^\dagger = c_1^*B_1^\dagger + \cdots + c_n^*B_n^\dagger$ los cuales no contienen operadores de momento, pues su suma se cancela, así que

$$[B, B^\dagger] = 0. \tag{C.5}$$

Por lo tanto

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j c_k^* [B_j, B_k^\dagger] = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 = 0, \tag{C.6}$$

de modo que tendremos

$$c_1 = \cdots = c_n = 0. \tag{C.7}$$

De manera similar se puede encontrar que los vectores $\vec{\beta_1}, \ldots, \vec{\beta_n}$ son linealmente independientes.

En vista de la conmutatividad C.1, el sistema de ecuaciones C.3 es integrable y, ya que los B_j son lineales en X, la solución ψ_0 tiene la forma

$$\psi_0(\vec{x}) = ce^{-\frac{1}{2}a_{ij}x_i x_j} = ce^{-\frac{1}{2}(\vec{x}^T \mathbf{a}\vec{x})}, \tag{C.8}$$

donde $\mathbf{a} = (a)_{ij}$ es una matriz $n \times n$ simétrica de coeficientes complejos. Introduciendo C.8 en C.3 obtenemos que $\mathbf{a}$ debe cumplir

$$\mathbf{a}\vec{\alpha_j} = \vec{\beta_j}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{C.9}$$

Ya que tenemos independencia lineal en los sistemas de vectores $\{\vec{\alpha_j}\}$ y $\{\vec{\beta_j}\}$, la ecuación anterior nos da una definición única de la matriz no singular $\mathbf{a}$. Más aún, por sustitución directa C.1 nos lleva a $\vec{\alpha_j}^T \cdot \vec{\beta_k} = \vec{\alpha_k}^T \cdot \vec{\beta_j}$ de modo que la simetría $\vec{\alpha_j}^T \mathbf{a}\vec{\alpha_k} = \vec{\alpha_k}^T \mathbf{a}\vec{\alpha_j}$ está garantizada.

Para obtener la forma explícita de $\mathbf{a}$, definimos una base $\vec{s_1}, \ldots, \vec{s_n}$ dual a $\vec{\alpha_1}, \ldots, \vec{\alpha_n}$, es decir

$$\vec{s_k} \cdot \vec{\alpha_j} = \delta_{kj} = \vec{\alpha_j}^\dagger \cdot \vec{s_k}^\dagger. \tag{C.10}$$

Dado que los productos $\vec{s_k}^\dagger \otimes \vec{s_j}$ generan todo el espacio de matrices $n \times n$ [21], podemos expresar $\mathbf{a}$ en la forma

$$\mathbf{a} = \alpha_{kj}\vec{s_k}^\dagger \otimes \vec{s_j}, \tag{C.11}$$

donde α_{kj} es otra matriz de coeficientes. Tomando ahora el producto escalar de C.11 con $\vec{\alpha_k}^\dagger$ por la izquierda y $\vec{\alpha_j}$ por la derecha encontramos

$$\alpha_{kj} = \vec{\alpha_k}^\dagger \mathbf{a}\vec{\alpha_j} = \vec{\alpha_k}^\dagger \cdot \vec{\beta_j}, \tag{C.12}$$

y usando C.2 vemos que

$$\alpha_{kj} + \alpha^*_{jk} = \vec{\alpha_k}^\dagger \cdot \vec{\beta_j} + \vec{\beta_k}^\dagger \cdot \vec{\alpha_j} = \delta_{kj}. \tag{C.13}$$

Así, la descomposición de C.11 en sus partes Hermitiana y anti-Hermitiana nos lleva a

$$\mathbf{a} = \mathbf{S} + i\mathbf{\Omega} \tag{C.14}$$

donde

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\vec{s_j}^\dagger \otimes \vec{s_j}, \tag{C.15}$$

$$\mathbf{\Omega} = \Big[(\vec{\alpha_k}^\dagger \cdot \vec{\beta_j} - \vec{\beta_k}^\dagger \cdot \vec{\alpha_j})/2i\Big]\vec{s_k}^\dagger \otimes \vec{s_j}. \tag{C.16}$$

La expresión C.8, por tanto, se convierte en

$$\psi_0(\vec{x}) = c \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} |\vec{s_j} \cdot \vec{x}|^2 - \frac{i}{2}[\vec{x}^T\mathbf{\Omega}\ \vec{x}]\right], \tag{C.17}$$

donde $\vec{x}^T\mathbf{\Omega}\ \vec{x}$ es real.

Bibliografía

[1] V. V. Dodonov. *Nonclassical states in quantum optics: a squeezed review of the first 75 years*, J. Opt. B. **4** (2002), R1–R33.

[2] R. J. Glauber. *Photon correlations*, Phys. Rev. Lett. **10** (1963), 84–86.

[3] R. J. Glauber. *Coherent and incoherent states of the radiation field*, Phys. Rev. **131** (1963), 2766–2788.

[4] V. Bargmann. *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform. Part I*, Commun. Pure App. Math, **14** (1961), 187–214.

[5] A. O. Barut, L. Girardello. *New "coherent states"associated with noncompact grups*, Commun. Math. Phys. **21** (1971), 41–55.

[6] A. M. Perelomov. *Coherent states for arbitrary lie group*, Commun. Math. Phys. **26** (1972), 222–236.

[7] V.V. Dodonov, E. V. Kurmyshev, V. I. Man'ko. *Generalized uncertainty relation and correlated coherent states*, Phys. Lett. A. **79** (1980), 150–152.

[8] A. Perelomov. *Generalized coherent states and their applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.

[9] J. R. Klauder, B. S. Skagerstam Eds. *Coherent states. Applications in physics and mathematical physics*, World Scientific, Singapore, 1985.

[10] J. P. Gazeau, S. T. Ali, J. P. Antoine. *Coherent states, wavelets and their generalizations*, Springer-Verlag, New York, Inc., 2000.

[11] K. E. Cahill. *Coherent-state representations for the photon density operator*, Phys. Rev. **138** (1965), B1566–B1576.

[12] V. Bargmann. P.Butera, L. Girardello, J. R. Klauder. *On the completeness of the coherent states*, Rep. Math. Phys. **2** (1971), 221–228.

[13] D. J. Fernández. *Estados coherentes para hamiltonianos unidimensionales*, B. Sc. thesis FCFM-BUAP, 2006

[14] B. Mielnik, D. J. Fernandez. *An electron trapped in a rotating magnetic field*, J. Math. Phys. **30** (1989), 537–549.

[15] A. G. Kurosch. *Curso de álgebra superior*, Mir, 1977.

[16] D. J. Fernández. *Semiclassical resonance in rotating magnetic fields*, Acta Physica Polonica **B21** (1990), 589–601.

[17] S. G. Cruz y Cruz. *Esquemas cuánticos de floquet: espetros y operaciones*, Ph.D. thesis CINVESTAV, (2005).

[18] S. I. Grossman. *Álgebra lineal*, McGraw-Hill, 1998.

[19] C. Cohen-Tannodji, B. Diu, F. Laloë. *Quantum Mechanics*, Wiley-Interscience, New York, 1977.

[20] J. V. Moloney F. H. M. Faisal. *Time-dependent theory of non-hermitian Schrödinger equation: application to multiphoton-induced ionization decay or atoms*, J. Phys. B. **14** (1981), 3603–3620.

[21] Nering, Evar D. *Linear algebra and matrix theory*, Wiley, New York, 1970.