METODOS MATEMATICOS

Examen de Admisión
Departamento de Física, CINVESTAV-IPN
Propedéuticos - Verano 2010

1. Demuestre que el operador correspondiente a la componente z del momento angular cuántico puede expresarse como

$$-i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\,\frac{\partial}{\partial \phi}\,,$$

donde ϕ denota el ángulo acimutal de las coordenadas polares esféricas.

2. El operador de momento angular $\mathbf{L}$ satisface $[L_x, L_y] = iL_z$, etc., o $\mathbf{L}\times\mathbf{L}= i\mathbf{L}$. Otros dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ conmutan entre sí y con $\mathbf{L}$. Utilizando notación tensorial, muestre que

$$[\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}, \mathbf{b}\cdot\mathbf{L}] = i(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{L}$$

3. Utilice el método de Frobenius para encontrar la solución de la ecuación del oscilador lineal (*Sugerencia:* Proponga una solución del tipo $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{k+i}$, $a_0 \neq 0$)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0\,.$$

4. Encuentre el desarrollo de Fourier en el intervalo $(-\pi, \pi)$ de una onda triangular representada por

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x\,, & 0 < x < \pi \\ -x\,, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

5. Considere dos bloques de masa m cuyo movimiento se restringe al eje horizontal (no afecta la gravedad). Los bloques están conectados entre sí y a paredes mediante resortes de constante k (pared - resorte - bloque - resorte - bloque - resorte - pared). Resuelva el problema de valores propios a fin de determinar los modos normales del sistema.