

Depto. de Física, CINVESTAV–IPN  
Examen de nivel métodos matemáticos,  
curso propedéutico verano 2011.

Titular del curso: Dr. Daniel Olguín,  
Nombre del aspirante: \_\_\_\_\_ Institución procedencia: \_\_\_\_\_

## 1 Resuelva detalladamente los siguientes ejercicios

1. Se sabe que el momento angular vectorial  $\mathbf{L}$  satisface la relación  $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$ . Sea un par de vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  que conmutan entre sí y con  $\mathbf{L}$ , es decir,  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{L}] = [\mathbf{b}, \mathbf{L}] = 0$ . Mostrar que

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{L}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{L}] = i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{L}$$

2. Un modelo de la corona solar supone que la ecuación de estado estable del flujo de calor satisface la relación

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = 0.$$

Donde  $k$ , la conductividad térmica, es proporcional a  $T^{5/2}$ . Suponer que la temperatura  $T$  es proporcional a  $r^n$ , muestre que una solución a la ecuación del flujo de calor está dada por  $T = T_0(r_0/r)^{2/7}$ .

3. Mostrar que la ecuación matricial

$$\left( \mathbf{M} \cdot \nabla + \mathbf{1} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0$$

reproduce las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Aquí  $\psi$  es un vector columna con componentes  $\psi_j = B_j - iE_j/c$ ,  $j = x, y, z$ .  $\mathbf{M}$  tiene componentes

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, M_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y se sabe que

$$\mathbf{M}^2 \psi = 2 \mathbf{1} \psi,$$

donde  $\mathbf{1}$  es la matriz unidad.

4. Hallar la serie de Fourier de

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

luego encuentre el caso particular  $x = \pi$ .