

ONDAS ELECTROMAGNETICAS DE SUPERFICIE EN SUPERREDES SEMI-INFINITAS

Xóchitl I. Saldaña

Departamento de Física, Instituto de Ciencias de la
Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48
Puebla, 72570 Puebla, México

G. González de la Cruz

Departamento de Física CINVESTAV-IPN Apartado Postal 14-740, 07000 México, D.F.

Resumen

Se obtienen expresiones analíticas que describen la propagación de ondas de superficie para campos TE y TM en estructuras de superredes semi-infinitas. Los modos decaen exponencialmente en la región del índice de refracción mayor y sus modulados por una función que decae exponencialmente lejos del final de la superred semi-infinita. Se desarrolla un criterio para la existencia de modos de superficie.

1. INTRODUCCION

Con el desarrollo de las tecnologías de crecimiento de cristales, tales como la epitaxia de haces moleculares, las microestructuras artificiales de alta calidad han venido a ser una realidad. Estructuras de capas periódicas de GaAs/GaAlAs, conocidas como superredes, han venido a ser muy importantes en aplicaciones ópticas y optoelectrónicas. Estas incluyen lasers de pozos cuánticos, guías de onda y moduladores ópticos. La mayoría de las aplicaciones se basan en el transporte de electrones o fotones característicos de estos medios.

El guiado de radiación electromagnética en estructuras de multicapas ha sido ampliamente estudiado recientemente en muchas aproximaciones.¹ Usando el método matricial, Walpita y Revelly han analizado el guiado de radiación general de N capas, pero sus resultados involucran matrices complejas.^{2,3} Fórmulas generales describiendo distribuciones de campo y ecuaciones de eigenvalores para los modos transversal-eléctrico y transversal-magnéticos fueron unidos por Li y Lit para analizar medios de capas simétricamente periódicos.⁴ Usando el método matricial, Yeh y colaboradores estudiaron la propagación de la radiación electromagnética en guías de onda en multicapas con distribuciones de índice de refracción periódico. En particular, ondas de superficie fueron observadas experimentalmente en configuraciones que consistían de muchas capas alternadas de GaAs/GaAlAs.⁵ En este artículo derivamos fórmulas explícitas para la propagación de radiación electromagnética para modos transversal-eléctrico (TE) y transversal-magnéticos (TM) en una guía de ondas de placas en multicapas, partiendo de las ecuaciones de Maxwell. Nuestro principal interés

será calcular la expresión para ondas de superficie en superredes semi-infinitas.

2. SUPERRED DE EXTENSION INFINITA

Considere un medio de superred infinito consistente en capas alternadas de materiales A y B con anchos a y b , e índices de refracción N_a y N_b ($N_a > N_b$) respectivamente. Sea el eje x perpendicular a las capas, entonces todas las interfaces serán paralelas al plano $y-z$. Asumiremos que todas las capas son ópticamente isotrópicas, entonces las ondas s (TE) y las ondas p (TM) no están acopladas. Esto nos permite eliminar la naturaleza vectorial del campo eléctrico y considerar las ondas s y las ondas p separadamente. Sin pérdida de generalidad, consideraremos la onda de propagación en el plano $x-z$. Por lo tanto en el caso de la polarización TE, de las ecuaciones de Maxwell se deduce que el campo eléctrico tiene como única componente a $E_y(x,z)$ que puede ser escrita como

$$E_y = E_y(x) e^{i\omega t - i\beta z} \quad (2.1)$$

donde ω es la frecuencia angular y β es la constante de propagación en la dirección z . Debido a que la estructura es periódica en la dirección x , nuestra labor es sintetizar las soluciones básicas de las ecuaciones de Maxwell a fin de que las condiciones apropiadas de frontera sean satisfechas en cada interfase y la solución forme una onda de Bloch con respecto a la traslación normal a la interfase. Por lo tanto, si $d=a+b$ es la longitud de una celda unitaria, requeriremos que $E_y(x)$ sea escrita en la forma

$$E_y(x) = e^{ikx} E_k(x) \quad (2.2)$$

donde para cualquier entero n

$$E_k(x+nd) = E_k(x). \quad (2.3)$$

Aquí k es el vector de onda de Bloch

En el presente análisis estamos considerando el guiamiento de ondas electromagnéticas de tal modo que se cumple la condición $N_b(\frac{\omega}{c}) < \beta < N_a(\frac{\omega}{c})$.

Esto significa que en la región A de la n-ésima capa tendremos un campo eléctrico oscilante y un vector de onda α_a , con $\beta < N_a(\frac{\omega}{c})$ y en la región B tendremos un campo eléctrico decayente y vector de onda α_b con $\beta > N_b(\frac{\omega}{c})$.

Vamos a considerar primero la forma del campo eléctrico dentro de la enésima placa del material A. el cual se extiende desde $x = nd$ a $x = nd + a$. Uno fácilmente verifica que la solución más generalizada de la ecuación de onda

$$\frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + [N^2(x) (\omega/c)^2 - \beta^2] E_y(x) = 0 \quad (2.4)$$

donde

$$N(x) = \begin{cases} N_a & nd < x < nd+a \\ N_b & nd+a < x < (n+1)d \end{cases} \quad (2.5)$$

puede ser escrita como

$$E_k(x) = e^{-iK(x-nd)} [Ae^{i\alpha_a(x-nd)} + Be^{-i\alpha_a(x-nd)}] \quad (2.6)$$

de modo que tenemos

$$E_y(x) = e^{iknd} [Ae^{i\alpha_a(x-nd)} + Be^{-i\alpha_a(x-nd)}] \quad (2.7)$$

En esta discusión, k es el vector de onda que finalmente entrará en la relación de dispersión de la radiación electromagnética en la superred. De igual manera, uno puede escribir la forma más general del campo eléctrico en el medio B dentro de la enésima capa el cual se extiende desde $x=nd+a$ a $(n+1)d$ teniendo en cuenta que como se trata del guiamiento de ondas electromagnéticas el campo será decayente en esta región. Así que tenemos

$$E_y(x) = e^{iknd} [Ce^{\alpha_b(x-nd-a)} + De^{-\alpha_b(x-nd-a)}] \quad (2.8)$$

donde

$$\alpha_a = [N_a^2 (\omega/c)^2 - \beta^2]^{1/2} \quad (2.9a)$$

y

$$\alpha_b = [\beta^2 - N_b^2 (\omega/c)^2]^{1/2} \quad (2.9b)$$

Existen cuatro constantes arbitrarias A, B, C y D las cuales aparecen en el campo eléctrico. Para restringir estas condiciones y obtener una relación de dispersión explícita para la propagación de ondas, necesitamos que las condiciones a la frontera en las diversas interfases sean obedecidas. Estas condiciones son: que el campo eléctrico $E_y(x)$ debe ser continuo a través de cada una de las interfases, junto con la componente normal del campo magnético. Usando las ecuaciones (2.7) y (2.8) aplicamos estas condiciones en $x=nd$ y $x=nd+a$, y la propiedad de Bloch de la solución básica nos asegura que éstas se satisfacen en cualquier lado. La continuidad de $E_y(x)$ en $x=nd+a$, junto con la componente tangencial del campo magnético B_z , nos da las dos ecuaciones de restricción:

$$Ae^{i\alpha_a a} + Be^{-i\alpha_a a} = C+D \quad (2.10)$$

y

$$i\alpha_a [Ae^{i\alpha_a a} - Be^{-i\alpha_a a}] = \alpha_b [C - D] \quad (2.11)$$

aplicando las mismas condiciones en $x=nd$, tenemos:

$$A+B = e^{-ikd} [Ce^{\alpha_b b} + De^{-\alpha_b b}] \quad (2.12)$$

$$i\alpha_a [A-B] = \alpha_b e^{-ikd} [Ce^{\alpha_b b} - De^{-\alpha_b b}] \quad (2.13)$$

Al establecer el determinante apropiado de 4x4, formado por las ecuaciones (2.10) (2.13) igual a cero, obtendremos una relación de dispersión implícita para la propagación de la radiación electromagnética en la superred. Esto se lee como

$$\frac{\alpha_b^2 - \alpha_a^2}{\alpha_b \alpha_a} \sinh \alpha_b b \sin \alpha_a a + \cosh \alpha_b b \cos \alpha_a a = \cos kd. \quad (2.14)$$

En general, esta relación de dispersión implícita debe ser resuelta numéricamente. Un problema similar fue resuelto por Yeh y colaboradores^{5,7} para una superred finita usando el método de matriz de traslación.

Para los modos TM (polarización p), los componentes de los campos magnéticos tienen expresiones similares a aquéllas para el campo eléctrico de los modos TE. Usando la siguiente ecuación de Maxwell $\nabla \times \vec{B} = i\omega \epsilon \vec{E}$, el campo eléctrico para la polarización p dentro de la enésima capa estará dado por:

$$E_z(x) = \frac{\alpha_a}{\omega \epsilon_a} e^{ikd} [Ae^{i\alpha_a(x-nd)} - Be^{-i\alpha_a(x-nd)}] \quad (2.15)$$

nd < x < nd+a

y

$$E_z(x) = \frac{-i\alpha_b}{\omega \epsilon_b} e^{ikd} [Ce^{\alpha_b(x-nd-a)} - De^{-\alpha_b(x-nd-a)}] \quad (2.16)$$

nd+a < x < (n+1)d

donde ϵ_a y ϵ_b son las constantes dieléctricas estáticas de los medio A y B respectivamente. Una vez más las condiciones a la frontera estándares electromagnéticas pueden ser aplicadas a las interfases de la superred infinita para llevarnos a la siguiente expresión para la relación de dispersión de los modos TM.

$$\left[\frac{\epsilon_a}{\alpha_a} - \frac{\epsilon_b}{\alpha_b} \right] \sinh \alpha_b b \sin \alpha_a a + 2 \frac{\epsilon_a \epsilon_b}{\alpha_a \alpha_b} [\cos \alpha_a a \cosh \alpha_b b - \cos kd] = 0. \quad (2.17)$$

Para una β dada, las soluciones de la ecuación (2.17) dan una o más bandas de frecuencia cuando ω es graficado contra k . Se puede demostrar fácilmente que nuestra relación de dispersión se reduce a las guías de onda de tres capas para los casos límites $b \rightarrow \infty$ y a finita.

3. SUPERREDES SEMIINFINITAS

La superred semiinfinita es creada al reemplazar la parte de la superred que se encuentra en la región $-\infty < x < 0$ por un material simple que tie-

ne un índice de refracción N_c . Buscamos soluciones para las ecuaciones de Maxwell en las cuales las amplitudes de campo estén localizadas en la interfase entre el medio C y la primera capa de la superred semiinfinita colocada en $x=0$. Los modos de superficie TE del lado de la superred que están compuestos por el campo en la región A más el campo en la región B, estarán modulados por una exponencial decauyente en la dirección de x creciente y pueden ser descritos de la siguiente forma

$$E_y(x) = e^{-\lambda nd} [Ae^{i\alpha_a(x-nd)} + Be^{-i\alpha_a(x-nd)}] \quad (3.1)$$

nd < x < nd+a

en el medio A y

$$E_y(x) = e^{-\lambda nd} [Ce^{\alpha_b(x-nd-a)} + De^{-\alpha_b(x-nd-a)}] \quad (3.2)$$

nd+a < x < (n+1)d

en el medio B

Aquí, la constante de atenuación λ será determinada en el subsecuente análisis.

Por supuesto, requerimos $\text{Re}(\lambda) > 0$. En la región $x < 0$, donde reside el material C, tenemos

$$E_y(x) = E_c e^{\alpha_c x} \quad (3.3)$$

donde

$$\alpha_c^2 = \beta^2 - N_c^2 (\omega/c)^2 \quad (3.4)$$

Ahora regresamos a las condiciones a la frontera. Las cuatro condiciones en la interfase $x = nd$ y $x = nd+a$ proporcionan un conjunto de relaciones para A, B, C y D idénticas a las de las ecuaciones (2.10) - (2.13), exceptuando que ik es reemplazada en cualquier lugar por $-\lambda$. Es conveniente eliminar C y D de estas ecuaciones para reducir el grupo a dos ecuaciones las cuales involucran sólo A y B. Una vez que esto esté hecho tendremos

$$\left[1 + \frac{i\alpha_a}{b}\right] \left(e^{i\alpha_a a} - e^{-\alpha_b b - \lambda d}\right) A + \left[1 - \frac{i\alpha_a}{b}\right] \quad (3.5)$$

$$\left(e^{-i\alpha_a a} - e^{-\alpha_b b - \lambda d}\right) B = 0 \quad (3.5)$$

y

$$\left[1 - \frac{i\alpha_a}{b}\right] \left(e^{i\alpha_a a} - e^{-\alpha_b b - \lambda d}\right) A + \left[1 + \frac{i\alpha_a}{b}\right] \quad (3.6)$$

$$\left(e^{i\alpha_a a} - e^{-\alpha_b b - \lambda d}\right) B = 0 \quad (3.6)$$

Para que las ecuaciones (3.5) y (3.6) sean satisfechas con A y B diferentes de cero, el determinante 2x2 apropiado debe hacerse cero, conduciendo a una ecuación de restricción sobre la constante de atenuación λ . Se debe tener

$$\cosh \lambda d = \frac{\alpha_b^2 - \alpha_a^2}{2\alpha_a \alpha_b} \sin \alpha_a a \sinh \alpha_b b + \cos \alpha_a a \cosh \alpha_b b \quad (3.7)$$

una relación equivalente a la ecuación (2.14) con la k reemplazada por $i\lambda$. Futuras restricciones se obtienen al requerir que las condiciones a la frontera sean satisfechas en la interfase $x=0$. Esto da simplemente

$$E_c = A + B \quad (3.8)$$

y

$$\alpha_c E_c = i\alpha_a (A - B) \quad (3.9)$$

o con E_c eliminado, tenemos una nueva ecuación la cual involucra A y B

$$\left[1 - \frac{i\alpha_a}{\alpha_c}\right] A + \left[1 + \frac{i\alpha_a}{\alpha_c}\right] B = 0 \quad (3.10)$$

Tenemos tres incógnitas A, B, y λ , y la ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.10) nos proporcionan tres ecuaciones de restricción. Al combinar las ecuaciones (3.6) y (3.10) tenemos

$$e^{-\lambda d} = e^{-\alpha_b b} [\cos \alpha_a a + T_- \sin \alpha_a a] \quad (3.11)$$

donde

$$T_- = \frac{\alpha_a^2 + \alpha_b \alpha_c}{\alpha_a (\alpha_b - \alpha_c)} \quad (3.12)$$

mientras que también podemos combinar la ecuación (3.5) con la ecuación (3.10) para encontrar una segunda relación para $\exp(-\lambda d)$

$$e^{-\lambda d} = e^{-\alpha_b b} [\cos \alpha_a a + T_+ \sin \alpha_a a] \quad (3.13)$$

donde

$$T_+ = \frac{\alpha_a^2 - \alpha_b \alpha_c}{\alpha_a (\alpha_b + \alpha_c)} \quad (3.14)$$

El lado derecho de la ecuación (3.11) debe ser igual al lado derecho de la ecuación (3.13), de este modo tenemos la restricción final

$$2 \sinh \alpha_b b \cos \alpha_a a + (T_+ e^{\alpha_b b} - T_- e^{-\alpha_b b}) \sin \alpha_a a = 0 \quad (3.15)$$

La ecuación (3.15) constituye una relación de dispersión implícita para las ondas de superficie. Una vez que esto es resuelto, debemos revisar entonces el valor de λ como se encontró, por ejemplo, de la ecuación (3.11) para estar seguros de que $\text{Re}(\lambda) > 0$.

Finalmente, para los modos de superficie TM en la superred semi-infinita, el campo eléctrico en cada región será calculado usando la ecuación de Maxwell que fue utilizada para calcular la ecuación (3.15). Y con las condiciones a la frontera apropiadas en cada interfase, obtendremos la condición para la constante de atenuación γ , la cual gobierna el decaimiento exponencial del campo magnético cuando uno penetra en la superred semi-infinita. Esta condición está dada por una expresión similar a la ecuación (2.16) pero con $k=i\gamma$. Además, con la aplicación de las condiciones a la frontera en la interfase $x=0$ de la superred semi-infinita, obtenemos dos ecuaciones para la constante de atenuación γ .

$$e^{-\gamma d} = e^{-\alpha_b b} [\cos \alpha_a a - T_- \sin \alpha_a a] \quad (3.16)$$

donde

$$P_- = \frac{\alpha^2 \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_c + \alpha^2 \alpha_b \epsilon_a}{\alpha^2 \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_c - \alpha^2 \alpha_b \epsilon_a} \quad (3.17)$$

$$e^{\gamma b} = e^{\alpha_b b} [\cos \alpha_a a - P_+ \sin \alpha_a a] \quad (3.18)$$

con

$$P_+ = \frac{\alpha^2 \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_c - \alpha^2 \alpha_b \epsilon_a}{\alpha^2 \epsilon_a \epsilon_b \epsilon_c + \alpha^2 \alpha_b \epsilon_a} \quad (3.19)$$

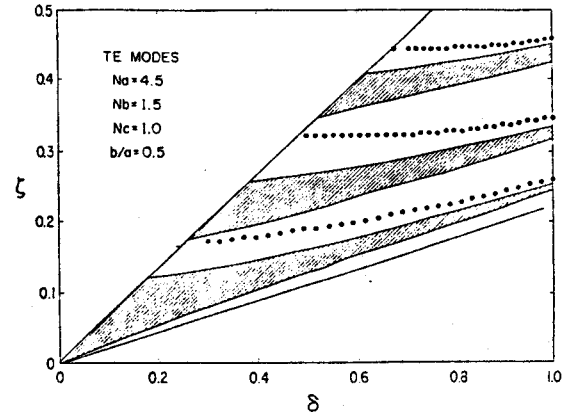
y la siguiente relación de dispersión para los modos electromagnéticos de superficie TM en la superred semi-infinita

$$2 \sinh \alpha_b b \cos \alpha_a a + [P_- e^{-\alpha_b b} - P_+ e^{\alpha_b b}] \sin \alpha_a a = 0 \quad (3.20)$$

En general, la ecuación (3.20) debe ser resuelta numéricamente para obtener las curvas de dispersión de la superficie.

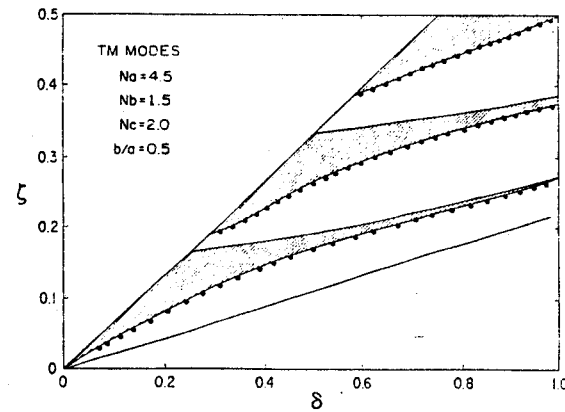
4. RESULTADOS NUMERICOS

En esta sección presentamos los resultados de los cálculos numéricos de las ondas de superficie en las ecuaciones (3.15) y (3.20) en la superred semi-infinita. Consideramos conveniente introducir la frecuencia sin dimensión $\zeta = \omega / \omega_0$, donde $\omega_0 = 2\pi c/d$, y el vector de onda sin dimensión $\delta = \beta / \beta_0$, donde $\beta_0 = 2\pi / d$. En la figura 1



1. La relación de dispersión TE para ambos modos: modos de superficie (líneas punteadas), de la superred semi-infinita y las de los modos del volumen.

se muestran los resultados de los modos electromagnéticos TE para $b/a = 0.5$, $N_b = 1.5$ y $N_c = 1$. Observamos que existen bandas que corresponden a los modos permitidos de volumen de la superred infinita dada por la ecuación (2.14) (áreas sombreadas), y que existen ramas del modo de superficie en el vacío entre las bandas (líneas punteadas). En la figura 2

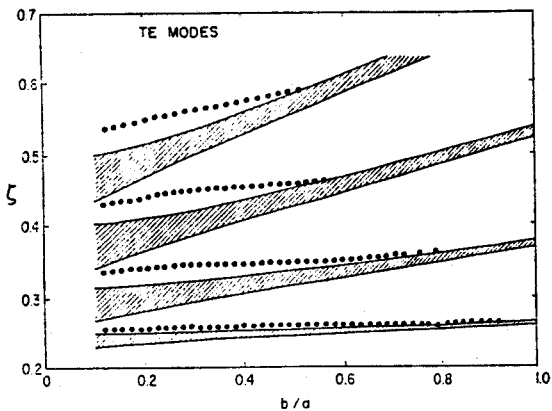


2. La relación de dispersión TM usando los mismos parámetros que en la figura 1, exceptuando $N_c = 2$.

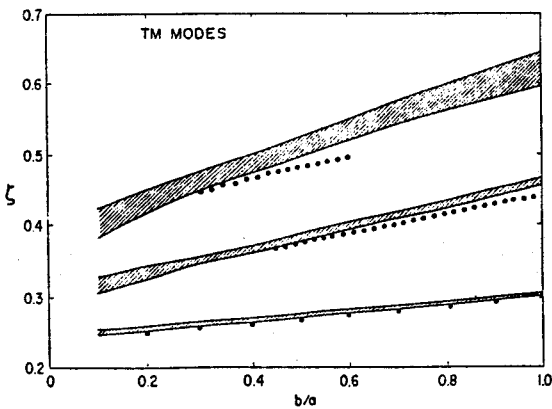
se muestran los modos electromagnéticos TM para la superred semi-infinita con los mismos valores de los parámetros como en el caso anterior, exceptuando que el índice de refracción para la

región $x < 0$ ha sido tomado con $N_c = 2$. Las áreas sombreadas corresponden a modos permitidos de volumen y las líneas punteadas corresponden a modos de superficie.

Como podemos observar las ramas de superficie existen debajo de la relación de dispersión del volumen de la superred (ecuación (2.17)). Este tipo de ondas de superficie guiadas existen también para la polarización electromagnética TE. Esos modos de superficie para ambos $N_b > N_c$ ó $N_b < N_c$ existen sólo cuando sus frecuencias caen fuera del modo de volumen continuo. Una de las características de estas ondas de superficie es que su energía es más o menos concentrada en los escasos primeros periodos del medio periódico semi-infinito. En las figuras 3 y 4



3. Los modos de la frecuencia TE para ambos: modos de frecuencia (líneas punteadas) de la superred semi-infinita, y los de los modos del volumen como función del ancho de la capa del índice de refracción más baja, para $\delta = 1$.



4. Los modos de frecuencia TM usando los mismos parámetros que en la figura 3 excepto que $N_c = 2$.

mostramos las gráficas de ω/ω_0 contra b/a para $\beta/\beta_0 = 1$ que corresponden a modos TE y TM respectivamente.

Las áreas sombreadas y las líneas punteadas tienen el mismo significado que en las figuras anteriores. Las líneas rectas continuas indican la región en la que se cumple que $N_b < \beta c/\omega < N_a$ que es en la que tiene lugar el guiamiento de las ondas.

Como podemos observar, bandas muy angostas ocurren para valores muy grandes de b/a . En esta situación las guías de onda de placa simple sobre cada capa están acopladas sólo débilmente y las bandas consisten casi de modos de guías de onda de 3 capas. Al disminuir b/a , los modos interactúan más fuertemente y la amplitud de la banda aumenta.

5. CONCLUSIONES

En conclusión, hemos analizado la propagación de la radiación electromagnética en las estructuras de superredes. Las expresiones analíticas son obtenidas para los modos de volumen y los modos de superficie en el régimen $N_b (\omega/c) < \beta < N_a (\omega/c)$.

Diversas gráficas de guías de onda de superficie son presentadas para la polarización TE y TM. Existen varios rasgos generales que vale la pena mencionar: Los modos electromagnéticos de superficie en superredes, semi-infinitas existen solamente cuando sus frecuencias recaen fuera del modo de volumen continuo, el sistema admite ramas de modos de superficie que siempre recaen arriba (para $N_b > N_c$) ó abajo (para $N_b < N_c$) de las bandas electromagnéticas. Las ondas de superficie para $N_b > N_c$ decaen en el continuo a ciertos valores críticos de β , mientras que para $N_b < N_c$ la relación de dispersión de estos modos emerge desde el continuo a algún valor de β . Para la β fija, también graficamos los modos electromagnéticos como una función de la separación de las placas de índice de refracción más alto de la superred. En este caso, el acoplamiento entre los modos es más fuerte en las bandas de energía más altas que en las bandas más bajas.

REFERENCIAS

1. Para una revisión reciente véase John W.Y. Lit, Yi-Fan Li, y Daniel W. Hewak Can. J. Phys. 66, 914 (1988)

2. L.M. Walpita J. Opt. Soc. Am. A2, 595 (1985)
3. J.F. Revelli, J. Appl. Opt. 20, 3158 (1981)
4. Yi-Fan, y John W,Y, Lit J. Opt. Soc. Am. A5, 1050 (1988)
5. Pochi Yeh, Ammon Yariv, y Chi-Shan Hong J. Opt. Soc. Am. 67, 423 (1977)
6. W. Ng, P. Yeh, P.C. Chen, y A. Yariv Appl. Phys. Lett. 32, 370 (1978)
7. Pochi Yeh J. Opt. Soc. Am. A2, 568 (1985)