

# Medición de radios de haces gaussianos por medio de la energía difractada normal a la pantalla por rejillas aperiódicas

O. Mata Méndez\* y F. Chávez Rivas\*  
 Depto. de Física de la ESFM-IPN  
 U.P. "A L M". Lindavista. C.P. 07738. México, D. F.

A. Ortíz Acevedo\*  
 Academia de Física de la ESIME-IPN  
 U.P. "A L M". Lindavista. C.P. 07738. México, D. F.

Por medio de la teoría escalar de la difracción de Rayleigh-Sommerfeld estudiamos la difracción de haces gaussianos por rejillas aperiódicas. Proponemos el uso de la energía difractada  $E$  en la dirección normal a la pantalla por rejillas aperiódicas en la medición de radios de haces gaussianos. Determinando el cociente de la energía difractada en la dirección normal a la pantalla en posiciones de mínima y máxima potencia en rejillas aperiódicas mostramos que se pueden extender los rangos de caracterización de haces Gaussianos en comparación con los resultados obtenidos con el mismo coeficiente en rejillas periódicas.

## 1. Introducción

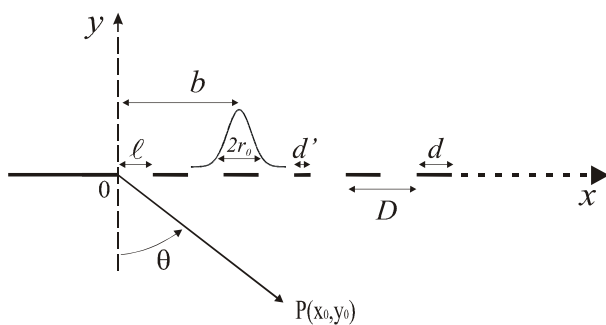
En 1989 Uppal<sup>1</sup> et al, demostraron que utilizando rejillas aperiódicas se puede extender el rango de la medición de los radios de haces gaussianos en comparación con las rejillas periódicas (comúnmente llamadas Ronchi rulings). Utilizando dos rejillas aperiódicas, Uppal extendió el rango de utilidad de las rejillas Ronchi a  $0.05 < r_0 / D \leq 10$ , en lugar de  $0.2 < r_0 / D \leq 1$ , para las rejillas periódicas, donde  $r_0$  denota el radio de los haces y  $D$  el periodo de la rejilla, estos rangos se determinaron midiendo la razón de las potencias mínima y máxima transmitidas.

Recientemente hemos establecido un método similar al propuesto por Uppal en la medición de diámetros gaussianos utilizando la energía difractada en la dirección normal a la pantalla por rejillas periódicas<sup>2</sup>, el objetivo de este trabajo es el de implementar la idea de Uppal sobre

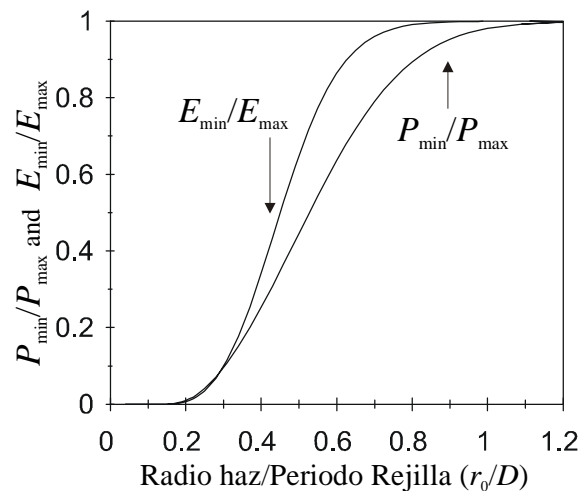
rejillas aperiódicas, utilizando el cociente de las energías difractadas en la dirección normal a la pantalla en posiciones de mínima y máxima potencia, en lugar de medir potencias. Para esto modelaremos dos rejillas aperiódicas, una con un periodo adicional  $D' = 3D$  y otra con un periodo adicional de  $D' = 0.625D$ , estos periodos adicionales los colocaremos a la mitad de una rejilla finita periódica. Los resultados numéricos de este trabajo muestran que se puede utilizar la energía difractada normal a la pantalla por rejillas aperiódicas en la determinación de los radios de los haces gaussianos incidentes.

## 2. Teoría de Rayleigh-Sommerfeld

Para determinar el radio  $r_0$  del haz incidente sobre una rejilla aperiódica, utilizaremos la teoría escalar de Rayleigh-Sommerfeld para haces gaussianos difractados por dos rejillas simétricas y periódicas acopladas por una

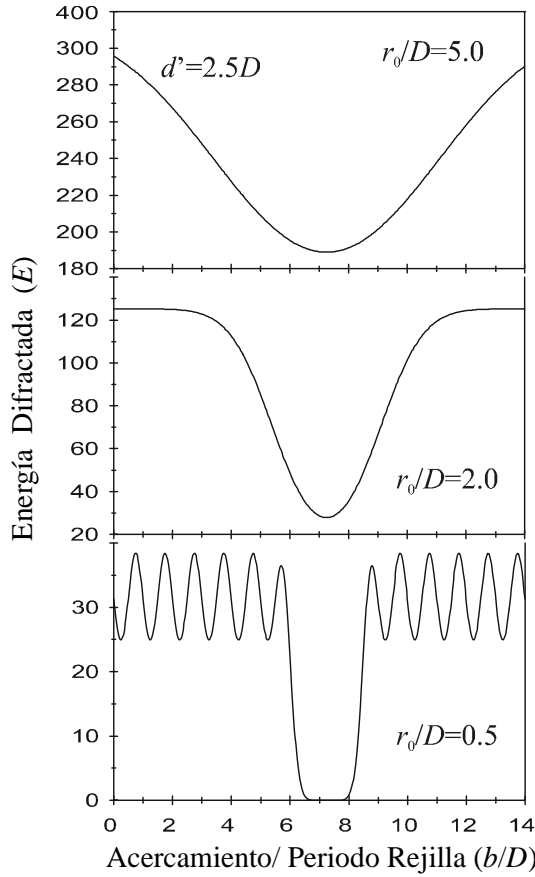


**Figura 1.** Rejilla aperiódica compuesta de  $N$  rendijas de ancho  $\ell$ , separación metálica  $d$  y una separación metálica  $d' \neq d$ , en una pantalla plana infinitamente delgada. Las rendijas son paralelas al eje  $Oz$ . La distribución de la intensidad del haz incidente en la pantalla tiene forma gaussiana de radio  $r_0$  y su posición está determinada por el parámetro  $b$ .

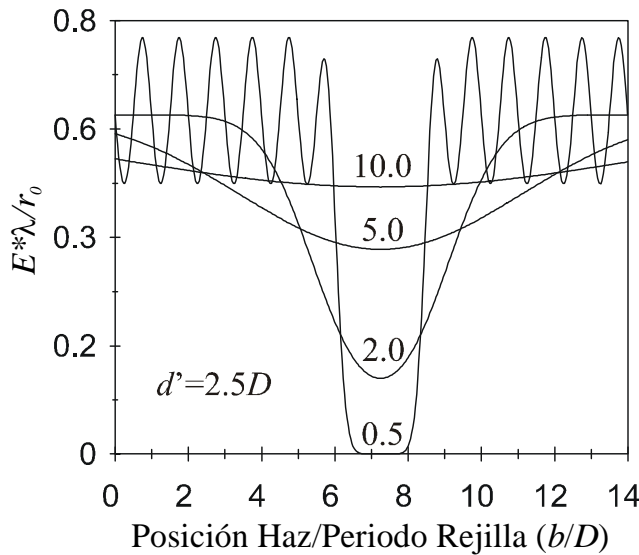


**Figura 2.** Razones de Potencia ( $P_{\min} / P_{\max}$ ) e Intensidades ( $E_{\min} / E_{\max}$ ) en función del radio del haz normalizado al periodo de la rejilla  $D$ , cuando  $D' = D$  y  $d = 0.5D$ ,  $\ell = 0.5D$ ,  $D = d + \ell = 1$  y  $\lambda/D = 0.01$

\*Becarios de COFAA-IPN



**Figura 3.** Energía difractada normalmente a la pantalla ( $E$ ) en función de la posición  $b$  normalizada al periodo de la rejilla  $D$ , cuando  $d' = 2.5D$  y  $D = d + \ell = 1$ ,  $\lambda/D = 0.01$  y diferentes valores del radio del haz normalizado  $r_0/D$ .



**Figura 4.** Producto de la energía difractada normalmente a la pantalla ( $E$ ) y la longitud de onda ( $\lambda$ ) entre el radio del haz ( $r_0$ ) en función de la posición  $b/D$ , cuando  $d' = 2.5D$ ,  $D' = 3D$  y  $D = d + \ell = 1$ ,  $\lambda/D = 0.01$  y  $r_0/D = 0.5, 2, 5$  y  $10$ .

separación metálica cuyo ancho es diferente de los anchos de las rejillas periódicas, esta separación metálica determina la aperiodicidad y tiene ancho  $d'$ , esta separación  $d'$  mas un ancho de rendija  $\ell$  con ancho de  $\ell = 0.5$ , nos proporciona un periodo adicional  $D' = d' + \ell$ . Las dos rejillas finitas periódicas se encuentran en una pantalla infinitamente delgada de conductividad infinita, cada rejilla periódica esta formada por rendijas de ancho  $\ell = 0.5$ , la separación metálica entre rendijas en cada rejilla es  $d = 0.5$  y el periodo de cada rejilla es  $D = \ell + d = 1$ . El haz incidente tiene una longitud de onda  $\lambda = 2\pi/k$  ( $k$  magnitud del vector de onda). Usaremos la representación compleja para los campos y el factor temporal  $\exp(i\omega t)$  será omitido. La geometría de nuestro sistema se muestra en la Fig. 1.

El haz incidente es un haz gaussiano, el cual en la pantalla y a incidencia normal esta dado por:

$$I(x) = \exp\left[-\frac{2(x-b)^2}{r_0^2}\right] \quad (1)$$

donde  $r_0$  es el radio de la gaussiana (decaimiento de la intensidad de  $1/e^2$ ) y  $b$  es el parámetro que da la posición del haz respecto del eje  $Oy$ . La amplitud del campo eléctrico del campo incidente asociada a esta distribución es:

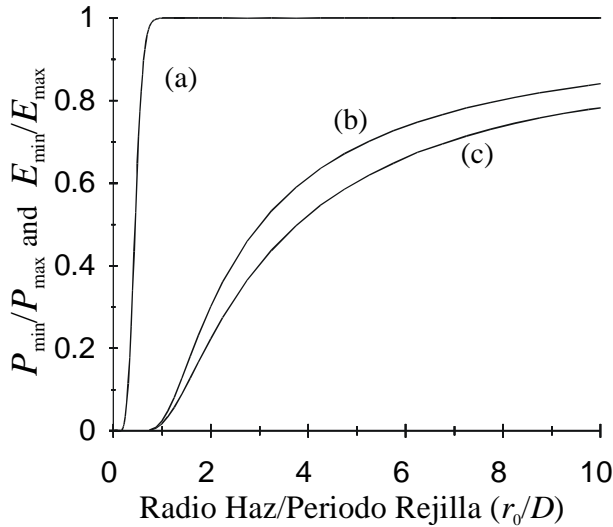
$$A(\alpha) = \frac{r_0}{\sqrt{2}} \exp(-iab) \exp\left(-\frac{\alpha^2 r_0^2}{4}\right) \quad (2)$$

En las definiciones anteriores de la intensidad del campo incidente (ec. 1) y la amplitud del campo incidente (ec. 2) hemos utilizado la definición de Uppal et al. para el radio del haz gaussiano incidente. Para comparar el radio  $r_0$  de este trabajo y el diámetro del ancho del haz  $L$  que hemos utilizado en la Ref. 2, se tiene la siguiente relación entre  $L$  y  $r_0$ ;  $L/D = \sqrt{2} r_0/D$ . Con esta conversión entre radio y diámetro

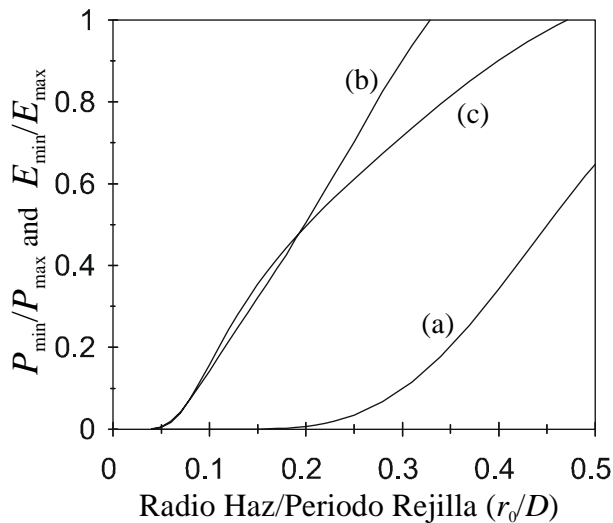
comparamos directamente los resultados de este trabajo con las gráficas de Uppal de la Ref. 1.

El campo difractado en la región de campo lejano producido por la interacción del haz gaussiano incidente y las rendijas de la rejilla aperiódica, se ha calculado por medio de ecuación de primera especie de Rayleigh-Sommerfeld. A partir de esta ecuación y considerando el caso de una rejilla finita, tenemos que la intensidad difractada a un ángulo  $\theta$  (ver Fig. 1) esta calculada por medio de la siguiente expresión<sup>3</sup>:

$$I(\theta) = \frac{k^2}{2\mu_0\omega I_0} \cos^2(\theta) \left| \hat{E}_i(k \sin(\theta), 0) \right|^2, \quad (3)$$



**Figura 5.** Razones de Potencia ( $P_{\min} / P_{\max}$ ) y energías difractadas normalmente a la pantalla ( $E_{\min} / E_{\max}$ ) en función del radio del haz  $r_0$  normalizado al periodo de la rejilla  $D$ . La curva (a) corresponde al cociente de Energías difractadas ( $E_{\min} / E_{\max}$ ) de una rejilla periódica y la curva (c) para una rejilla aperiódica. La curva (b) corresponde la razón de potencia ( $P_{\min} / P_{\max}$ ) de una rejilla aperiódica. Las curvas (b) y (c) se obtuvieron con los siguientes parámetros:  $d' = 2.5D$ ,  $D' = 3D$  y  $D = d + \ell = 1$  y  $\lambda/D = 0.01$ .



**Figura 6.** Razones de Potencia ( $P_{\min} / P_{\max}$ ) y energías difractadas normalmente a la pantalla ( $E_{\min} / E_{\max}$ ) en función del radio del haz  $r_0$  normalizado al periodo de la rejilla  $D$ . La curva (a) corresponde al cociente de Energías difractadas ( $E_{\min} / E_{\max}$ ) de una rejilla periódica y la curva (b) para una rejilla aperiódica. La curva (c) corresponde la razón de potencia ( $P_{\min} / P_{\max}$ ) de una rejilla aperiódica. Las curvas (b) y (c) se obtuvieron con los siguientes parámetros:  $d' = 0.125D$ ,  $D' = 6.25D$  y  $D = d + \ell = 1$ ,  $\lambda/D = 0.01$ .

en esta ecuación,  $I_0$  es la energía total incidente;  $\hat{E}_i$  denota la transformada de Fourier del campo incidente en las rendijas, y esta expresado por:

$$\hat{E}_i(k \sin \theta, 0) = \frac{\ell}{2\pi - k} \int CH(\alpha) (1 + \exp[i(\alpha - k \sin \theta)(N\ell + (N-1)d + d')]) d\alpha \quad (4)$$

donde

$$CE(\alpha) = A(\alpha) \exp[i(\alpha - k \sin \theta)\ell/2] \times \exp[i(N-1)(\alpha - k \sin \theta)(d + \ell)/2] \times \frac{\sin[(\alpha - k \sin \theta)\ell/2]}{(\alpha - k \sin \theta)\ell/2} \times \frac{\sin[N(\alpha - k \sin \theta)(d + \ell)/2]}{\sin[(\alpha - k \sin \theta)(d + \ell)/2]}$$

En la ecuación 4,  $d'$  representa la separación metálica que produce la discontinuidad en el periodo de la rejilla.

### 3. Resultados numéricos

A partir de la ecuación (3) calculamos la energía difractada normal a la pantalla  $E$  cuando  $\theta = 0^\circ$  (ver Fig. 1), y las potencias de transmisión están dadas por la Energía Total difractada dada por la sumatoria de  $I(\theta)$  normalizada a la energía incidente.

En la Fig. 2 mostramos los cocientes de potencias  $P_{\min}/P_{\max}$  y de energías perpendiculares a la pantalla  $E_{\min}/E_{\max}$  para una rejilla periódica calculadas con la teoría escalar de Rayleigh-Sommerfeld. De estas curvas podemos ver que los rangos en el radio del haz son análogos a los de Uppal, pero en este caso el cociente de potencias se ha calculado a partir de las energías difractadas, en cambio Uppal determina este cociente midiendo la transmitancia de las rejillas Ronchi. De estas gráficas midiendo experimentalmente cualquiera de los dos cocientes se determina el ancho de los haces incidentes.

En la figura 3 se muestra la energía difractada normal a la pantalla  $E$  en función del parámetro de la posición  $b$  para una rejilla aperiódica, para los siguientes radios  $r_0/D = 0.5, 2, \text{ y } 5$  y  $\lambda/D = 0.01$ . La aperiodicidad la produce la separación  $d' = 2.5D$ , la cual junto con la siguiente ventana de ancho  $\ell = 0.5$  produce un periodo adicional  $D' = 3D$  que se encuentra a la mitad de la rejilla.

Como se observa de la figura 3, al barrer el haz desde posiciones muy lejanas al centro donde se encuentra la discontinuidad, se presenta un mínimo en la energía alrededor de la discontinuidad, a este mínimo lo designamos por  $E_{\min}$ , también se encuentra un máximo para cada curva que designamos por  $E_{\max}$ . De estos resultados y otros no mostrados encontramos que estos barridos proporcionan un mínimo y un máximo en la energía difractada  $E$ .

También de la figura 3 se observa que estas curvas no están acotadas a un mismo rango como es el caso de las potencias, sin embargo si trazamos el producto de la

energía  $E$  y la longitud de onda  $\lambda$  y normalizamos al radio  $r_0$ , se encuentra que las curvas de la figura 3 se pueden trazar en la misma gráfica.

En la Figura 4 hemos trazado a la cantidad  $E^*\lambda/r_0$  en función del acercamiento  $b$ . Esta representación de la energía  $E$  nos proporciona curvas muy similares a las obtenidas por Uppal para el caso de potencias.

A partir de la determinación numérica de los  $E_{\min}$  y los  $E_{\max}$  para sus correspondientes anchos incidentes y para una rejilla aperiódica con un periodo adicional  $D' = 3D$ ,  $d' = 2.5D$  y  $\ell = 0.5D$  se calculo el cociente  $K = E_{\min} / E_{\max}$ , el trazo correspondiente es la curva (c) de la figura 5. Hemos calculado este cociente para varias longitudes de onda en el rango escalar de la difracción y se encontró que es independiente de la longitud de onda.

La curva (c) de la figura 5 sugiere que la determinación experimental de  $K$  es suficiente para obtener el radio  $r_0$  cuando  $1 < r_0 / D \leq 10$ . En la figura 5 también hemos trazado el cociente  $K$  para la rejilla periódica (curva (a)) y el cociente  $K$  para potencias (curva (b)) de la rejilla aperiódica.

Al comparar el cociente  $K$  de energías normales para las rejillas periódica y aperiódica dadas por las curvas (a) y (b) de la Fig. 5, se observa que se ha extendido el rango superior del cociente  $K$ . También al comparar el cociente  $K$  para intensidades y potencias de la rejilla aperiódica curvas (c) y (b) de la Fig. 5, se muestra que las curvas de intensidades y potencias tienen comportamientos similares.

Para extender el rango de la  $K$  por debajo del radio  $r_0/D=0.2$  dado por una rejilla periódica se introduce a continuación un periodo adicional  $D' = 0.625$ , formado por

una separación  $d' = 0.125D$  y un ancho de rendija  $\ell = 0.5D$ . Para esta rejilla aperiódica también se determinaron numéricamente los  $E_{\min}$  y los  $E_{\max}$  para anchos  $r_0/D$  en el rango de 0.05 a 0.5, estos resultados corresponden a la curva (b) de la figura 6. En esta figura también hemos trazado los resultados obtenidos con la  $K$  de potencias, curva (c) de la Fig. 6, así como la parte correspondiente del cociente  $K$  para las energías  $E$  de la rejilla periódica, curva (a) de la Fig. 6; Estas gráficas nos muestra que el rango de medición de radios de las haces gaussianos se ha extendido y comienza en  $r_0/D = 0.05$ .

#### 4. Conclusiones

En este trabajo hemos establecido un nuevo método en la determinación del ancho de haces gaussiano utilizando una rejilla aperiódica. La aperiodicidad la produce una separación metálica  $d'$  entre rendijas, en este caso utilizamos a las separaciones  $d' = 2.5D$  y  $d' = 0.125D$ , estas separaciones han permiti6 extender el rango del cociente  $K$  de las energías normales a la pantalla con respecto al rango de rejillas periódicas.

#### Referencias

- [1] J. S. Uppal, P. K. Gupta and R. G. Harrison, Opt. Lett. **14**, 683(1989).
- [2] O. Mata-Méndez y F. Chávez-Rivas., J. Opt. Soc. Am. A. **18**, 537(2001).
- [3] O. Mata-Méndez y F. Chávez-Rivas, Rev. Mex. Fís. **39**, 371(1993).