

Teoría rigurosa de la dispersión de haces gaussianos por una rejilla con sustrato metálico

O. Mata Méndez, Chávez Rivas

*Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas.
Instituto Politécnico Nacional, C.P. 07738 Zacatenco. México, D.F., México.*

J. Sumaya Martínez

*Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma del Estado de México. Av. Instituto
Literario No. 100, C.P. 50000 Toluca. Estado de México, México.
(Recibido 15 de octubre de 2003; Aceptado 26 de febrero de 2004)*

Se presenta una teoría rigurosa de la dispersión de haces Gaussianos a incidencia normal y oblicua por una rejilla finita en una pantalla conductora, de espesor cero y con sustrato metálico. El sustrato puede ser el vacío o un conductor. Se considera el caso de polarización T.E., es decir, el campo eléctrico es paralelo a las rendijas. Se analiza en la región vectorial de la difracción a patrones de dispersión en función de la longitud de onda, del hacho del haz y de la posición del haz. De estos resultados se ha encontrado que el ancho de los órdenes de dispersión aumenta con la relación λ/L , donde λ es la longitud de onda y L el ancho del haz incidente. Cuando el sustrato es un conductor la ecuación de dispersión por una rejilla en reflexión predice la posición angular de los órdenes dispersados de una rejilla finita con una buena aproximación. Además, la posición angular de estos órdenes es independiente del sustrato, del ancho y de la posición del haz.

Palabras clave: Dispersión; Difracción; Óptica electromagnética; Rejilla; Rejilla finita; Física óptica

A rigorous scattering theory of oblique incident Gaussian beams by a finite grating is presented. The grating is peared on a thin screen of infinite conductivity with a metallic substrate. The substrate can be the void or a conductor. We consider the case of polarization T.E., that is, the electric field is parallel to the slits. We numerically analyzed in the vectorial diffraction region the scattering patterns as a function of: the wavelength, the width and the position of the beam. From these results we have found that the width of the dispersion orders increases with the relationship λ/L , where λ is the wavelength and L the width of the incident beam. When the substrate is a conductor the dispersion equation for a grating in reflection predicts the angular position of the dispersed orders of a finite grating with a good approach. Also, the angular position of these orders is independent of the substrate, the width and of the position of the beam.

Keywords: Finite grating; Gaussian beams; Polarization T.E.

1. Introducción

En el XXI Congreso Nacional de Ciencias de Superficie y Vacío (2001) presentamos [1] un estudio teórico y numérico preliminar, sobre una teoría modal rigurosa, para la difracción de haces Gaussianos por una rejilla finita constituida de N rendijas de ancho ℓ y separación d en una pantalla de espesor cero y conductividad infinita. En este estudio se analizó el caso de incidencia normal y se consideró el estado de polarización T.E., es decir, con el campo eléctrico paralelo a las rendijas. Posteriormente reportamos [2] un estudio más detallado sobre el mismo problema, es decir, la difracción de haces Gaussianos por un rejilla finita formada de N rendijas de ancho ℓ y periodo D . En estos trabajos se analizaron las características de patrones de difracción en campo lejano, del coeficiente de transmisión y de la energía difractada normal a la pantalla en función de varios parámetros optogeométricos en la región vectorial de la difracción, donde los efectos de la polarización son importantes. En la Ref. [2], también se estudiaron los cambios en la difracción producidos por un error en el período de la rejilla finita. Por último la existencia en la región escalar de ángulos de intensidad constante en campo lejano cuando la posición del haz incidente cambia a lo largo de las N rendijas en una

pantalla infinitamente delgada, fue generalizada a la región vectorial.

En el presente reporte extendemos la teoría modal de las referencias[1,2] al caso de la dispersión de haces Gaussianos a incidencia normal y oblicua sobre una rejilla finita hecha de N canales igualmente espaciados y con un sustrato, el cual puede ser, ya sea el vacío o un conductor. El estudio de un canal [3] de ancho l y profundidad h , con sustrato metálico también se ha considerado en la implementación de la dispersión de haces de ancho finito por una rejilla finita con sustrato metálico. La rejilla finita forma parte de una pantalla perfectamente conductora de espesor cero. Según nuestro conocimiento este caso no ha sido considerado en la literatura en detalle. En este trabajo se considera el caso de polarización T.E. (campo eléctrico incidente E_i paralelo a las acanaladuras) y en un futuro trabajo el modo T.M. (campo magnético incidente H_i paralelo a las acanaladuras) será estudiado. Enfocaremos nuestra atención a la región vectorial de la dispersión aún cuando la región escalar de la dispersión también se puede tomar en cuenta.

Es importante mencionar que el problema tratado en este reporte no es solamente un aspecto interesante del campo de la teoría ondulatoria electromagnética, sino que también es un aspecto importante que está relacionado con

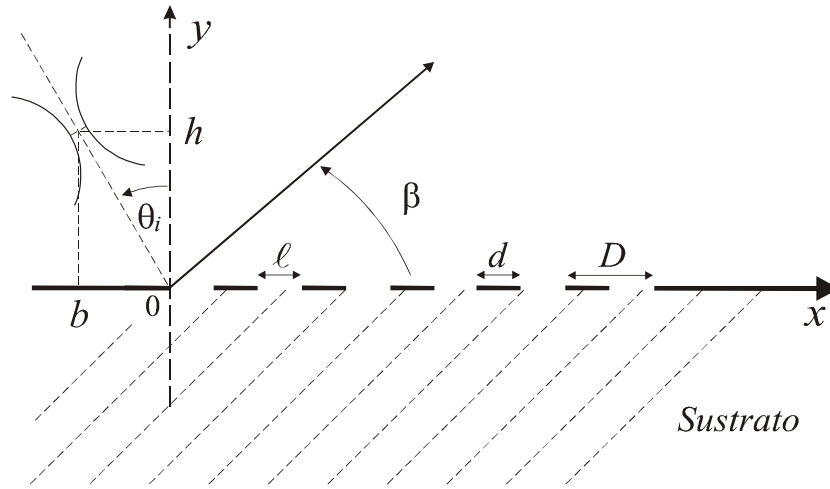


Figura 1. Nuestra configuración. N rendijas de ancho ℓ con separación d en una pantalla metálica de conductividad infinita y sustrato metálico. El ángulo β es usado para describir los patrones de dispersión.

mediciones y diagnóstico de superficies por medio de microondas, de ondas milimétricas, de láseres y de haces ultrasónicos y particularmente en el desarrollo de varios tipos de dispositivos ópticos tales como multiplexómetros, polarizadores, filtros ópticos y acopladores de guías de onda [4].

2. Formulación de la teoría

Considérense N rendijas en una pantalla infinitamente delgada de conductividad infinita, con ancho de las rendijas $\ell = 1$ y separación entre rendijas de d , es decir, se supondrá una rejilla finita de periodo $D = \ell + d$ (ver figura 1). Asumiremos que el sustrato puede ser el vacío o un conductor. El haz gaussiano incide oblicuamente con un ángulo θ_i con polarización T. E. y con una longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$ (k magnitud del vector de onda). Usaremos la representación compleja para los campos y el factor temporal $\exp(i\omega t)$ será omitido.

Sea $E(x, y)$ la componente del campo eléctrico cuando se tiene la polarización T. E. (campo eléctrico paralelo al eje Oz), este campo satisface la ecuación de Helmholtz.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2 E = 0 \tag{1}$$

donde $k = k_0 n$ y $k_0 = 2\pi / \lambda$ es el módulo del vector de onda en el vacío y n es el índice de refracción del medio, el cual es un número complejo para el sustrato.

Denotemos por E_1 y E_2 las soluciones de la Ec. (1) para $y > 0$ y para $y < 0$ respectivamente como un número infinito de ondas planas y ondas evanescente de la siguiente manera:

$$E_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_0}^{k_0} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta y)} d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha \tag{2}$$

(para $y > 0$)

$$E_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_c y)} d\alpha \quad (\text{para } y < 0) \tag{3}$$

donde tenemos las siguiente definiciones $\beta^2 = k_0^2 - \alpha^2$ con $\text{Im}(\beta) \geq 0$, y $\beta_c^2 = k^2 - \alpha^2$ con $\text{Im}(\beta_c) \geq 0$. El vector de onda k es un número complejo, ya que en general el sustrato es un conductor.

En la ecuación (2) la función $A(\alpha)$ es la amplitud del haz incidente E_i , y $B(\alpha)$ representa a la onda dispersada. El campo debajo de la pantalla está dado por el coeficiente $C(\alpha)$.

Nótese que el signo + en las exponenciales significa que tenemos una onda propagándose hacia arriba, mientras que el signo - significa ondas propagándose hacia abajo.

Supongamos que $E_3(x, y = 0)$ es el campo eléctrico en $y = 0$, el cual tiene que ser nulo en la pantalla según nuestro modelo de conductividad infinita y que lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$E_3(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \phi_{n1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n2} \phi_{n2}(x) + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nN} \phi_{nN}(x) \tag{4}$$

donde las funciones $\phi_{np}(x)$ (con $p = 1, 2, \dots, N$) están dadas por:

$$\phi_{np} = \begin{cases} \sin\left\{ [x - (p-1)D] \frac{n\pi}{\ell} \right\} & \text{si } (p-1)D \leq x \leq \ell + (p-1)D \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \tag{5}$$

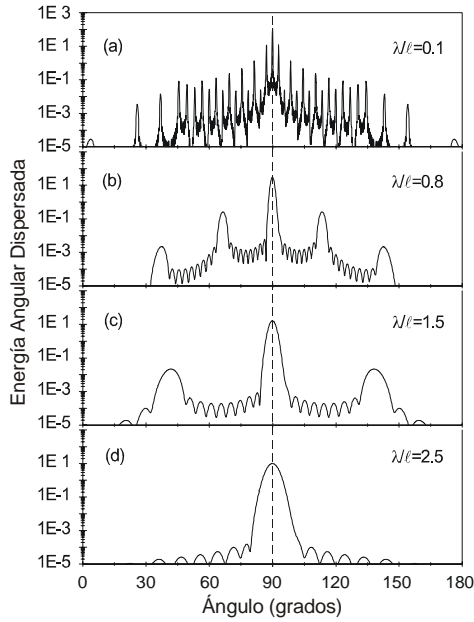


Figura 2. Influencia de la longitud de onda en la Energía angular dispersada cuando el sustrato es oro. Para una rejilla finita hecha de 10 rendijas y periodo $D/l=2$. El ángulo de incidencia es $\theta_i=0^\circ$, el ancho del haz es $L=20/\sqrt{2}$, para las longitudes de onda $\lambda/l=0.1$ (a), 0.8 (b), 1.5 (c) y 2.5 (d).

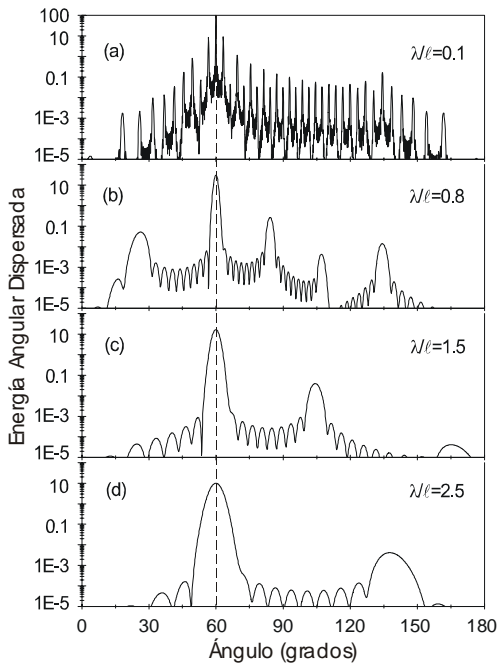


Figura 3. Influencia de la longitud de onda en la Energía angular dispersada cuando el sustrato es oro. Para incidencia oblicua de $\theta_i=30^\circ$, mismos parámetros de la Fig. 2.

Los coeficientes a_{np} son los llamados coeficientes modales y las funciones $\phi_{np}(x)$ son funciones seno en las rendijas y son nulas a lo largo de la pantalla y constituyen una base ortogonal.

Para calcular el campo dispersado dado por el segundo integrando de la Ec. (2) utilizaremos las condiciones de continuidad[2, 3] obtenidas a partir de las ecuaciones de Maxwell. Estas condiciones de continuidad nos conducen al siguiente sistema matricial para los coeficientes modales de la Ec. (4) hasta ahora desconocidos.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n1} \langle (\beta + \beta_c) \hat{\phi}_{n1}, \hat{\phi}_{mq} \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n2} \langle (\beta + \beta_c) \hat{\phi}_{n2}, \hat{\phi}_{mq} \rangle + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nN} \langle (\beta + \beta_c) \hat{\phi}_{nN}, \hat{\phi}_{mq} \rangle = 2 \langle \beta A(\alpha), \hat{\phi}_{mq} \rangle \quad (6)$$

con $m=1,2,\dots,\infty$, y $q=1,2,\dots,N$. Con la inversión matricial del sistema (6) se determinan numéricamente los coeficientes modales de la Ec. (4) y de esta forma el problema de la dispersión de un haz gaussiano por una rejilla finita constituida de N rendijas pasa a un sistema lineal algebraico en función de los coeficientes modales de la Ec. (4).

Una vez determinados los coeficientes modales de la Ec. (4), es inmediato calcular el campo dispersado para la polarización T.E.

3. Resultados numéricos

Como onda electromagnética incidente, consideraremos la versión bi-dimensional de un haz gaussiano, el cual en la pantalla y a incidencia normal tiene a su campo eléctrico dado por:

$$E(x, y=0) = \exp \left[-\frac{2(x-b)^2}{L^2} \right] \quad (7)$$

A partir de esta expresión la amplitud espectral del haz gaussiano a incidencia oblicua es:

$$A(\alpha) = \frac{L}{2} (\cos \theta_i + \frac{\alpha}{\beta} \text{sen} \theta_i) \exp[i(-\alpha b + \beta h)] \exp(-\gamma^2 / 2) \quad (8)$$

Donde θ_i es el ángulo de incidencia con respecto del eje Oy. La posición de la cintura del haz incidente esta dada por b y por h, esta última será igual a cero, para colocar de ahora en adelante al haz en la pantalla (ver Fig. 1). Denotaremos por L al diámetro del haz cuando la intensidad del haz a decaído de 1/e y $\gamma = (\alpha \cos \theta_i - \beta \text{sen} \theta_i) L / 2$.

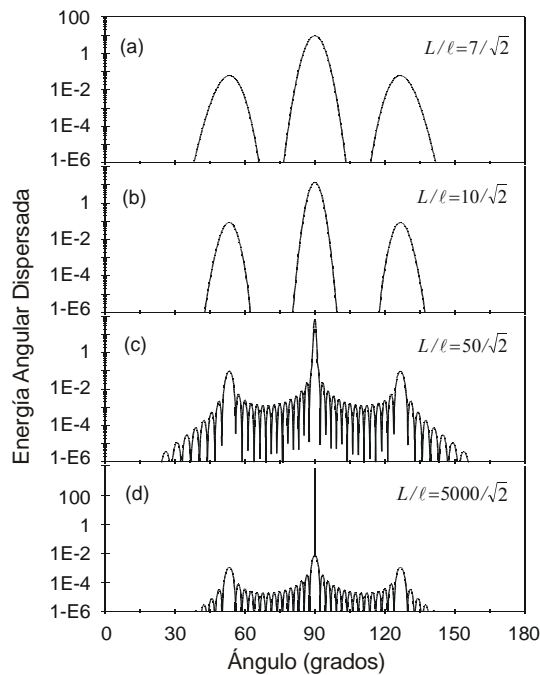


Figura 4. Influencia del ancho del haz en la Energía angular dispersada cuando el sustrato es oro. Para una rejilla finita hecha de 15 rendijas y periodo $D/\ell = 1.5$, iluminada por un haz gaussiano a incidencia normal ($\theta_i = 0^\circ$), con una longitud de onda $\lambda/\ell = 0.9$ y anchos de haz: a) $L/\ell = 7/\sqrt{2}$, b) $L/\ell = 10/\sqrt{2}$, c) $L/\ell = 50/\sqrt{2}$ y d) $L/\ell = 5000/\sqrt{2}$.

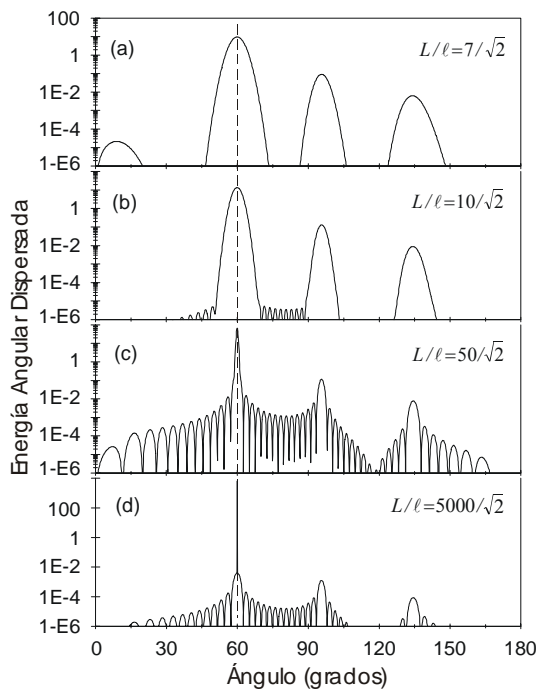


Figura 5. Mismos parámetros de la Fig. 4 pero con incidencia oblicua de $\theta_i = 30^\circ$

Los índices complejos η de los sustratos de las rejillas finitas que se presentan a continuación han sido obtenidos por interpolación del Handbook of optical constants of solids by Edward D. Palik [5]

3.1 Influencia de la longitud de onda

En las Figuras 2 y 3 mostramos la influencia de la longitud de onda en la energía angular reflejada cuando el sustrato es oro. Suponemos una rejilla finita formada de 10 rendijas de ancho $l = 1$ y separación $d = 1$ y con periodo $D/\ell = 2.0$. Esta rejilla finita es iluminada por un haz Gaussiano a incidencia normal a la pantalla, $\theta_i = 0^\circ$, Fig. 2 y a incidencia oblicua de 30° , Fig. 3; el ancho del haz incidentes es $L/\ell = 20/\sqrt{2}$ y las longitudes de onda incidentes son: $\lambda/\ell = 0.1, 0.8, 1.5$ y 2.5 .

De estos resultados tenemos que la ecuación de la rejilla en reflexión dada por $\cos \beta_n = \text{sen} \theta_i + n\lambda/D$, ver Fig. 1, predice la posición de los órdenes difractados, con un error máximo relativo de 0.35%. También se puede observar que el ancho angular de los órdenes aumenta cuando la longitud de onda aumenta. Estas conclusiones fueron establecidas en transmisión y para incidencia normal de haces Gaussianos para una rejilla finita [1, 2].

3.2 Influencia del ancho del haz

En las figuras 4 y 5 mostramos la influencia del ancho del haz en la energía angular dispersada cuando el sustrato es oro. En estas simulaciones la rejilla finita esta formada por 15 rendijas con un período normalizado de $D/\ell = 1.5$ e iluminada por haces Gaussianos a incidencia normal, Fig. 4, e incidencia oblicua de $\theta_i = 30^\circ$, Fig. 5, para una longitud de onda $\lambda/\ell = 0.9$ y anchos de haz $L/\ell = 7/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}, 50/\sqrt{2}$ y $5000/\sqrt{2}$

Nuevamente comparando el orden de dispersión mostrado en las Figuras 4 y 5 en función del ancho del haz, con el predicho por la ecuación de la rejilla, hemos encontrado un error máximo relativo de 0.32%. También se puede observar que el ancho angular del orden disminuye cuando el ancho del haz aumenta, este resultado también ya ha sido observado para el caso de transmisión en el vacío para una rejilla finita [1, 2]. Además la posición angular de los órdenes es independiente del ancho del haz (L/λ).

De los resultados de las dos secciones anteriores podemos concluir que el ancho de los órdenes de dispersión aumenta con la relación λ/L , donde λ es la longitud de onda y L es el ancho del haz incidente, ver Fig. 1.

3.3 Influencia de la posición del haz

A continuación mostramos la energía dispersada cuando el sustrato es el vacío o un conductor y la posición del haz es el centro y la orilla de la rejilla finita. En todos los casos considerados hemos graficado la energía dispersada por una rejilla finita constituida por 10 rendijas con periodo $D/\ell = 2$. También supondremos una incidencia oblicua de

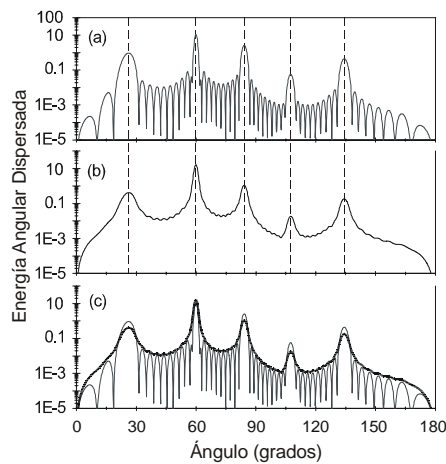


Figura 6. Energía angular dispersada cuando el sustrato es el vacío. Para una rejilla finita hecha de 10 rendijas y periodo $D/\ell=2$. El ángulo de incidencia es $\theta_i=30^\circ$, la longitud de onda es $\lambda/\ell=0.8$, y el ancho del haz es $L=20/\sqrt{2}$. En (a) el haz está centrado en la rejilla finita ($b/\ell=9.5$), en (b) el centro del haz está localizado en la orilla de la rejilla finita ($b/\ell=0$) y en (c) se muestra la superposición de (a) y (b).

haces Gaussianos de 30° , una longitud de onda de $\lambda/\ell=0.8$ y un ancho de haz $L=20/\sqrt{2}$.

En la Fig. 6 hemos trazado la energía angular reflejada cuando el sustrato es el vacío. En la Fig. 6a el haz se encuentra en el centro de la rejilla finita, ($b/\ell=9.5$, ver Fig. 1) y en la Fig. 6b el centro del haz está localizado en la orilla de la rejilla finita ($b/\ell=0$, ver Fig. 1). Estas dos figuras nos muestran la influencia de la posición del haz en la distribución angular de la energía. En ambos casos se observan la presencia de los cinco órdenes de dispersión que predice la ecuación de la difracción de una red dada por $\cos \beta_n = \sin \theta_i + n\lambda/D$, ver Fig. 1.

De estos resultados podemos decir:

- 1) Que para un haz gaussiano incidente la ecuación de la red en reflexión predice las posiciones angulares de los órdenes dispersados por una rejilla finita con una buena aproximación, es decir, las posiciones angulares de estos órdenes son independientes del ancho del haz y de la posición de haz en la rejilla finita.
- 2) En la Fig. 6c hemos superpuesto a las Figs. 6a y 6b. De esta superposición tenemos que la envolvente de la energía reflejada se mantiene constante cuando la posición del haz cambia a lo largo de la rejilla finita.
- 3) Estas dos últimas conclusiones también se cumplen para un sustrato metálico como se muestra en la Fig. 7 para el litio y para un sustrato de oro (resultados no mostrados). En esta figura hemos utilizado los mismos parámetros de la Fig. 6. Estas gráficas nos muestran como cambia la energía

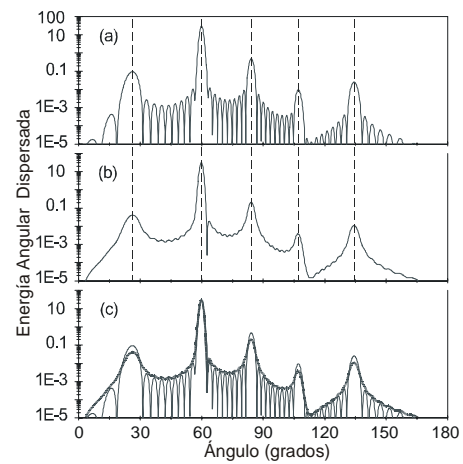


Figura 7. Mismos parámetros de la Fig. 6, pero para una rejilla finita con sustrato de litio.

dispersada cuando la conductividad del sustrato aumenta. Y por último también observamos que los órdenes de dispersión son independientes de la conductividad del sustrato.

4. Conclusiones

Se ha presentado una teoría modal rigurosa para resolver el problema de la dispersión de haces Gaussianos por una rejilla finita en una pantalla plana con sustrato. Hemos supuesto que el sustrato sea el vacío o un conductor. El caso de polarización T.E. y de incidencia normal y oblicua ha sido considerado. Este trabajo se ha llevado a cabo en la región vectorial de la difracción donde los efectos de la polarización son importantes. El estudio numérico de los patrones de dispersión en función de varios parámetros optogeométricos nos ha permitido analizar la influencia de sustratos metálicos.

Agradecimientos

El autor J. Sumaya Martínez agradece el apoyo de CONACYT-México y a la UAEM por los apoyos I35695 y 1527/2001.

Los autores O. Mata Méndez y F. Chávez Rivas agradecemos el apoyo de la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas del Instituto Politécnico Nacional.

Referencias

- [1] J. Sumaya-Martinez, O. Mata-Mendez, and F. Chavez-Rivas, *Superficies y Vacío*, **13**, 38, (2001).
- [2] J. Sumaya-Martinez, O. Mata-Mendez, and F. Chavez-Rivas, *J. Opt. Soc. Am. A*, **20**, 827 (2003).
- [3] O. Mata-Mendez, J. Sumaya-Martinez, and F. Chavez-Rivas, *Rev. Mex. Fis.* **41** 807 (1995).
- [4] E. Loewen and E. Popov, *Diffraction gratings and applications*, Marcel Dekker, Inc., New York (1997).
- [5] Palik D. Edward, *Handbook of optical constants of solids*, Academic Press Inc. (1985).

