

## SIMULACION ANALOGICA DE LOS EFECTOS ANARMONICOS EN UNA RED QUASIPERIODICA BIDIMENSIONAL

R. Fuentes, O. Navarro<sup>1</sup> y Ch. Wang

*Instituto de Investigaciones en Materiales, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Apartado Postal 70-360, 04510, México D.F., MEXICO*

R.A. Barrio y R.G. Barrera

*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Apartado Postal 20-364, 01000, México D.F., MEXICO*

Partiendo de la equivalencia entre las ecuaciones de movimiento de los fonones isotrópicos y las leyes de Kirchhoff, se diseñan observaciones experimentales de los *eigen*-valores y las *eigen*-funciones vibracionales en una red de Penrose de osciladores eléctricos *LC*. La interferencia de ondas eléctricas producida en dicha red, ha revelado aspectos claves relacionados al controvertido tema de la localización de ondas en sistemas quasiperiódicos. Existen *eigen*-estados realmente extendidos a baja frecuencia y estados críticamente localizados, cuando la longitud de onda es comparable con el parámetro de la red. Los efectos anarmónicos son importantes cuando se excita la red con un mayor voltaje. El corrimiento de los *eigen*-valores se analiza a partir de un modelo perturbativo de las ecuaciones diferenciales no lineales. Este estudio puede extenderse a redes fractales para iniciar el estudio de la no linealidad en las propiedades ópticas de una superficie rugosa conductora.

### I. INTRODUCCION

La quasiperiodicidad y la dinámica no lineal han sido objeto de intensa investigación en los últimos años. Uno de los puntos más controvertidos en relación a los efectos de la quasiperiodicidad es la localización de las funciones de onda. Los estudios teóricos predicen la naturaleza crítica de las *eigen*-funciones electrónicas en redes quasiperiódicas de una [1] y dos dimensiones [2], y se esperan peculiaridades en las propiedades de transporte derivadas de dichas funciones de onda [3]. Los experimentos de transporte en quasicristales reales son poco claros y no presentan las peculiaridades esperadas, hasta la fecha [4]. Sin embargo, se han obtenido resultados sumamente interesantes en sistemas quasiperiódicos artificiales. La primera realización de dichos sistemas fué una superred, siguiendo la secuencia de Fibonacci [5]. El espectro obtenido de la dispersión Raman en dicha superred, ha mostrado la existencia de dobleces inconmensurados de la "zona de Brillouin" para las bandas acústicas [6]. Cabe mencionar también los experimentos realizados sobre un arreglo de juntas Josephson en forma de una red de Penrose [7]. Otro estudio, más relevante para visualizar la distribución espacial de la función de onda, consiste en conectar un conjunto de diapasones formando una red de Penrose y excitarlos con ondas acústicas [8], sin embargo, una de las dificultades de dicho experimento es la necesidad de equipos sofisticados para una medición precisa.

En este artículo reportamos un nuevo intento de observar directamente la localización de ondas en sistemas quasiperiódicos, el cual consiste en aplicar corriente alterna monocromática a una red de osciladores *LC* interconectados de acuerdo a la red de Penrose. Este experimento tiene la virtud de ser simple, ilustrativo y no requiere equipos complejos, en consecuencia, puede utilizarse también para fines docentes. Asimismo, se puede excitar el circuito con un mayor voltaje para observar efectos no lineales en los *eigen*-modos de vibración.

La suposición de oscilaciones atómicas pequeñas parece ser razonable para la mayoría de los sólidos. Por lo tanto, uno concluiría que las correcciones anarmónicas son de interés exclusivamente para cálculos de alta precisión. Sin embargo, esto es incorrecto, ya que en muchos fenómenos físicos la participación de las interacciones anarmónicas es determinante, por ejemplo, la expansión y la conducción térmica, la variación de los *eigen*-modos fonónicos con la temperatura, entre otros. En este artículo analizaremos los efectos anarmónicos por medio de simulaciones analógicas, puesto que las ecuaciones diferenciales no lineales que describen la anarmonicidad de una red, tanto periódica como quasiperiódica, no tienen solución exacta.

El artículo está compuesto de 4 secciones. En la sección II se explican los detalles del circuito de osciladores *LC* en el que fueron realizadas las mediciones. La sección III presenta los resultados experimentales, los cuales son comparados con la teoría. Algunas conclusiones relacionadas a los efectos tanto de quasiperiodicidad como de la no linealidad se discuten en la sección IV.

<sup>1</sup>Dirección Permanente: Escuela de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa, Apartado Postal 1872, Culiacán, Sin., MEXICO

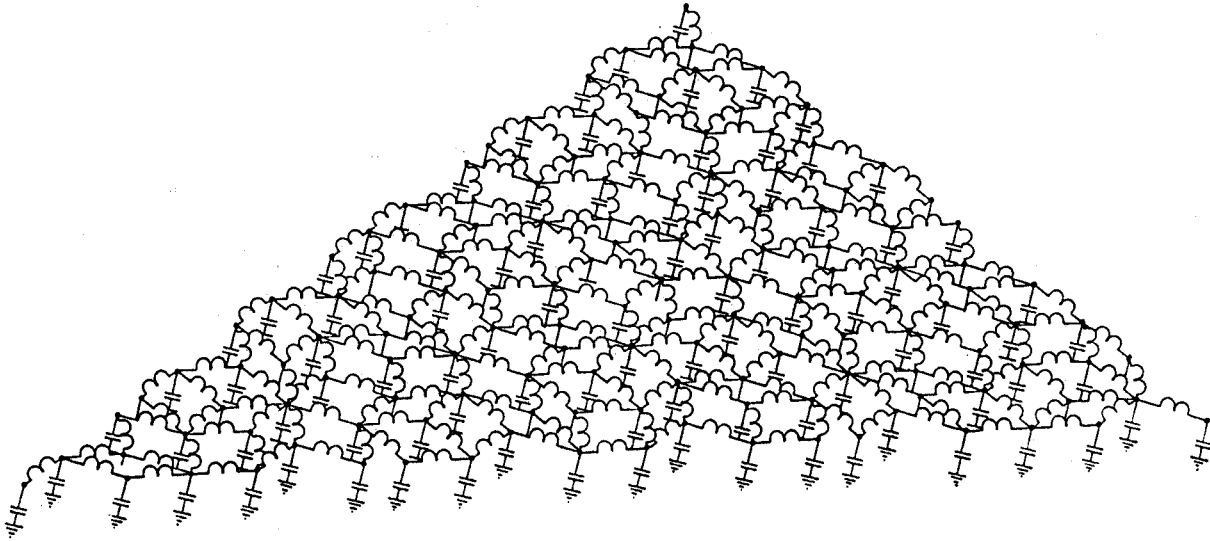


Fig. 1 Dibujo esquemático de la red de osciladores  $LC$  interconectados formando un mosaico de Penrose. Los enlaces de dicho mosaico se reemplazan por inductores y en cada vértice hay un capacitor con un extremo conectado a la tierra y el otro a los inductores.

## II. CIRCUITO DE OSCILADORES $LC$

Un circuito simple  $LC$  se asemeja a un sistema de una masa amarrada a un resorte en que, entre otras cosas, ambos sistemas tienen una frecuencia característica de oscilación. En el caso del circuito, la frecuencia característica está dada por [9]:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

Cuando se tiene un conjunto de osciladores  $LC$  interconectados, como se muestra en la Fig. 1, las frecuencias características se determinan a partir de las leyes de Kirchhoff para estados estacionarios, que pueden escribirse convenientemente como:

$$i\omega CV_n + \frac{1}{i\omega L} \sum_m (V_n - V_m) = 0, \quad (2)$$

donde la inductancia ( $L$ ) y la capacitancia ( $C$ ) tienen el mismo valor para todos los elementos, y  $V_n$  es el voltaje medido en el sitio  $n$ , cuando se excita el sistema mediante una onda estacionaria de frecuencia  $\omega$ . Aquí, la sumatoria se extiende a todos los sitios  $m$  directamente conectados al sitio  $n$ . Las Ecs. (2) constituyen un problema de *eigen*-valores y tienen la misma solución de la ecuación secular

$$-M\omega^2 U_n + K \sum_m (U_n - U_m) = 0 \quad (3)$$

para los desplazamientos  $U_n$  de masas  $M$  interconectadas a través de "resortes isotrópicos" de constante de fuerza  $K$ . Las Ecs. (3) pueden identificarse como ecuaciones de movimiento para los fonones isotrópicos o para los electrones  $s$  dentro de la aproximación de amarre fuerte (*tight binding*) [10]. Esta equivalencia no es sorprendente, ya que en los 3 casos se trata de propagación de ondas en redes discretas. Las condiciones a la frontera para la Ec. (2) dependen de la forma de alimentar al sistema. En nuestro caso, inducimos un voltaje en el sitio 1 que se localiza en el extremo agudo del triángulo de la Fig. 1. Por lo tanto, la primera de las Ecs. (2) ( $n = 1$ ) tiene un término inhomogéneo de corriente  $I(\omega)$ .

La red mostrada en la Fig. 1 corresponde a la generación 13 de la red de Penrose, de acuerdo al proceso de inflación desarrollado por Wang y Barrio [11]. Esta red contiene 137 vértices y 240 enlaces. Cada vértice consiste de un capacitor de  $1\mu\text{F} \pm 10\%$  con un extremo conectado a tierra. Los enlaces de dicha red son inductores toroidales de  $7.8\text{ mH} \pm 5\%$ , los cuales se conectan a los extremos libres de los capacitores. Por lo tanto, el arreglo puede visualizarse como una red quasiperiódica bidimensional de líneas de transmisión [9]. La forma toroidal de los inductores obedece a la necesidad de minimizar el problema de inductancia mutua. Los núcleos toroidales son de ferrita con una permeabilidad magnética relativa  $\mu/\mu_0 \simeq 1500$ , y tienen un diámetro externo de 30 mm, el interno de 18.5 mm y 8 mm de espesor. Dichos núcleos son embobinados con alambre de cobre de 1.1 mm de diámetro y el

número de vueltas de las bobinas se ajusta con el fin de reducir la diferencia en  $L$  entre ellas. Los efectos disipativos de los inductores fueron examinados experimentalmente, y los resultados indican que las inductancias tienen un término imaginario  $-R(\omega, \Delta V)/\omega$  que depende tanto de la frecuencia como de la diferencia de potencial a la que están sometidas. A voltaje constante ( $\Delta V = 0.2 \text{ volts}$  de pico a pico),  $R(\omega) \simeq 0.006\omega^{0.7}$  y a frecuencia fija ( $\omega = 500 \text{ Hz}$ ),  $R(\Delta V) \simeq 5.6\Delta V$ . Por otro lado, la parte real de la inductancia es también función del voltaje aplicado, por ejemplo para 500 Hz,  $L(\Delta V) \simeq 7.7 + 4.5\Delta V$ .

### III. RESULTADOS

El experimento se realiza alimentando una corriente monocromática en el extremo agudo de la red con un voltaje de 0.2 volts de pico a pico. La medición de dicha corriente como función de la frecuencia se muestra en la Fig. 2. Estos datos se comparan con la solución apropiada de las Ecs. (2) con una inductancia  $L$  compleja. Observe que la concordancia es excelente, lo cual nos brinda confianza en las mediciones de nuestro circuito. Cabe mencionar que el cálculo teórico no contiene parámetros ajustables, excepto  $R(\omega)$ . Las frecuencias de los modos normales son independientes del valor de  $R(\omega)$ , a pesar de que las intensidades relativas de los picos de alta frecuencia son disminuidas por el efecto disipativo  $R(\omega)$ .

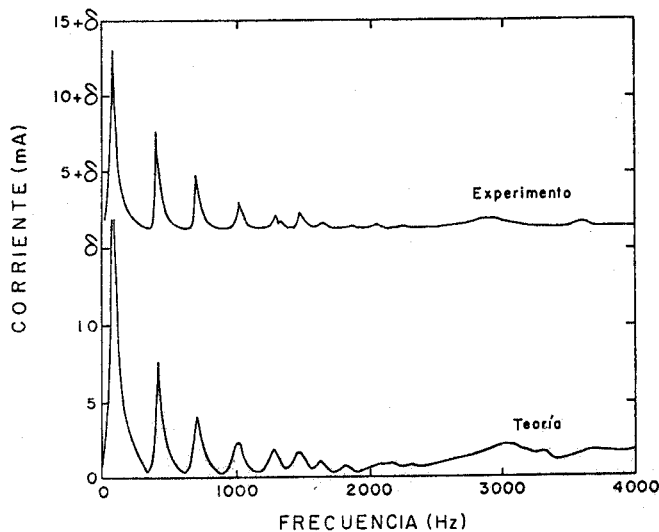


Fig. 2 Comparación entre los espectros teórico y experimental de la corriente de alimentación del circuito, la cual fué inyectada en el extremo agudo del triángulo de la Fig. 1. La escala vertical para los datos experimentales ha sido corrida por una constante  $\delta$ .

La amplitud de las ondas se puede medir para cualquier estado y en todos los sitios. En la Fig. 3 se muestran las distribuciones espaciales de la amplitud para los primeros 6 *eigen*-estados de la Fig. 2. Nótese que el *eigen*-estado en 80 Hz corresponde a un modo acústico de una longitud de onda cuatro veces mayor que el tamaño del sistema. Esto

es de esperarse, puesto que a bajas frecuencias las ondas no "ven" la característica discreta de la red. Los modos subsiguientes se puede entender por analogía con los estados excitados de una membrana continua, a pesar de que la influencia de la red discreta quasiperiódica se incrementa. Para los estados de alta frecuencia, la distribución espacial de las amplitudes comienza a localizarse en ciertas regiones de la red, esto se debe a que la longitud de onda comienza a ser comparable con la distancia interatómica.

En la literatura existen numerosos estudios acerca de la distribución espacial de la amplitud de las funciones de onda electrónicas en sistemas quasiperiódicos [1,2,12]. Generalmente, dichas distribuciones son muy complicadas y pueden compararse con nuestros resultados para los modos de alta frecuencia. La complejidad en la estructura se debe a la incomensurabilidad de la onda con la red.

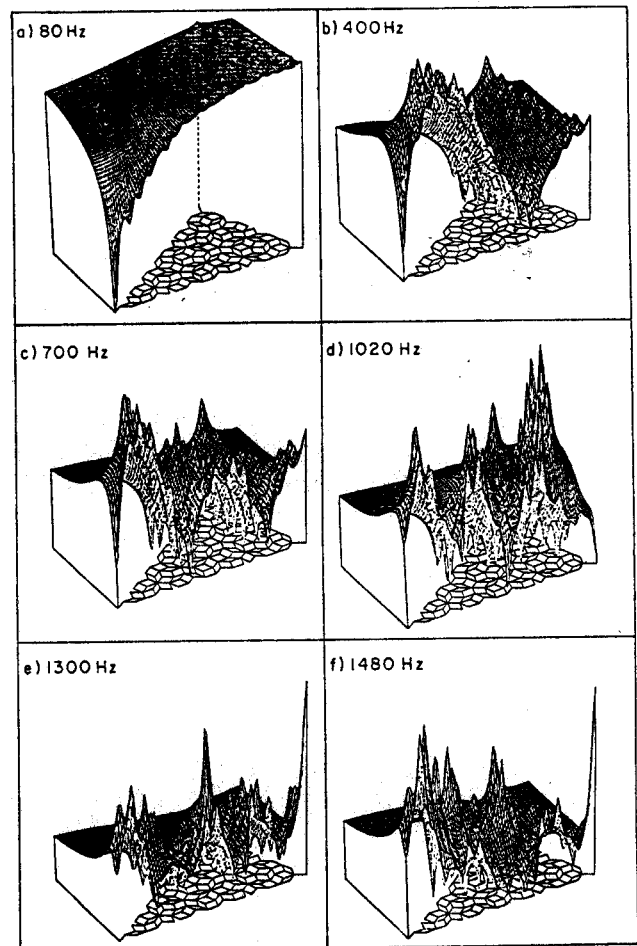


Fig. 3. Distribución espacial de las amplitudes para los 6 primeros *eigen*-estados de menor frecuencia (Fig. 2). Los *eigen*-valores de estos estados se indican en cada figura. Los ejes verticales representan los voltajes medidos en los vértices.

La Fig. 4 muestra la variación de los *eigen*-valores para los primeros 5 estados, cuando se incrementa el voltaje de alimentación. Obsérvese que existe una disminución en el

valor de las frecuencias para todos los estados, excepto el modo de frecuencia más baja. Para analizar esta variación consideremos las leyes de Kirchoff en forma de ecuaciones diferenciales

$$C \frac{d^2 V_n}{dt^2} + \sum_m \frac{1}{L} (V_n - V_m) = 0, \quad (4)$$

donde la inductancia  $L = L_0 + l\Delta V + i \frac{r}{\omega} \Delta V$ , siendo  $L_0 = 7.7mH$ ,  $l = 4.5mH/volts$  y  $r = 5.6\Omega/volts$ . Expandiendo la Ec. (4) en serie de Taylor, se tiene que

$$C \frac{d^2 V_n}{dt^2} + \frac{1}{L_0} \sum_m (V_n - V_m) - \frac{1}{L_0} \sum_m \left( \frac{l + i \frac{r}{\omega}}{L_0} \right) (V_n - V_m)^2 + \frac{1}{L_0} \sum_m \left( \frac{l + i \frac{r}{\omega}}{L_0} \right)^2 (V_n - V_m)^3 - \dots = 0. \quad (5)$$

La ecuación (5) representa un sistema acoplado de 137 ecuaciones diferenciales no lineales y se asemeja a las ecuaciones de movimiento para fonones con interacciones anarmónicas. Este sistema de ecuaciones no tiene solución analítica. Por lo tanto, nuestro circuito brinda una alternativa al estudio de los efectos anarmónicos en quasicristales y permite un análisis analógico de la solución exacta.

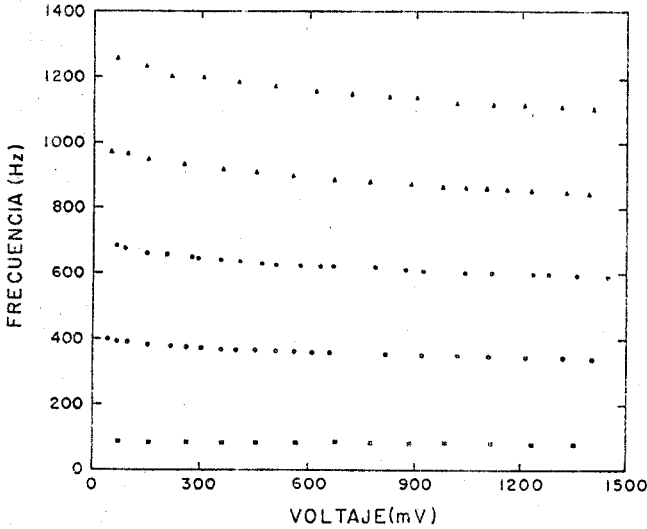


Fig. 4. Variación de *eigen*-valores de los 5 estados de menor frecuencia como función del voltaje de alimentación (RMS).

Únicamente con el fin de estimar la importancia de los efectos anarmónicos, se reescribe la Ec. (5), sin considerar el acoplamiento entre diferentes osciladores

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \omega_0^2 V - \omega_0^2 \epsilon V^2 + \omega_0^2 \epsilon^2 V^3 - \dots = 0, \quad (6)$$

donde  $\epsilon = (l + i \frac{r}{\omega}) / L_0$ . La Ec. (6) puede resolverse a partir de una serie de aproximaciones sucesivas y el corrimiento de la frecuencia a primer orden está dado por [13]:

$$\omega - \omega_0 \simeq - \frac{A^2 \epsilon^2 \omega_0}{24}, \quad (7)$$

donde  $A$  es la amplitud del oscilador no perturbado. De manera similar al análisis perturbativo, la disminución en la frecuencia de los *eigen*-modos puede explicarse también por la Ec. (1), ya que al incrementar el voltaje aumenta la inductancia, y consecuentemente disminuyen las frecuencias. La forma explícita de disminución depende de la topología de la red. El análisis cuantitativo de este fenómeno está actualmente en proceso y será publicado en el futuro.

#### IV. CONCLUSIONES

Hemos presentado un nuevo método de examinar la propagación de ondas en redes quasicristalinas bidimensionales. Este dispositivo permite medir directamente las amplitudes de los *eigen*-estados en cualquier sitio del sistema. El modelo es versátil y puede utilizarse para numerosos estudios, tales como conductancia selectiva, anisotropía del flujo de corriente, fenómenos de resonancia en radiofrecuencia y redes fractales, entre otros.

A pesar de que la red examinada es relativamente pequeña, los resultados muestran los efectos de la quasiperiodicidad y de la no linealidad sobre los *eigen*-modos del sistema. Es importante enfatizar que la simplicidad de la red ha permitido aislar las características importantes del sistema, y consecuentemente se logra una buena correspondencia entre la teoría y el experimento, lo cual constituye una situación poco usual en los estudios de materiales reales.

Por otro lado, hemos demostrado que los efectos no lineales en nuestro circuito pueden tratarse como términos anarmónicos, y tienen la propiedad general de reducir las frecuencias de los modos normales del sistema armónico.

Es obvio que este circuito, o uno semejante, puede utilizarse para estudiar defectos locales o extendidos en sistemas bidimensionales. Existe una clase de estos sistemas muy importante, que son las superficies de materiales conductores. Cuando hay rugosidades en dichas superficies y se incide con una onda electromagnética, se forman capacitancias e inductancias locales que pueden simularse con este circuito.

**Agradecimientos:** Deseamos manifestar nuestro agradecimiento a los físicos E. Amano y E. Martínez por los apoyos técnicos que nos han brindado. El presente trabajo fue financiado parcialmente por la DGAPA de la UNAM, bajo el contrato IN-100-289-UNAM.

#### REFERENCIAS

- [1] M. Kohmoto, B. Sutherland y C. Tang, Phys. Rev. B 35, 1020(1987).
- [2] P. Ma y Y. Liu, Phys. Rev. B 39, 9904(1989).
- [3] K. Ueda y H. Tsunetsugu, Phys. Rev. Lett. 58, 1272(1987).

- [4] B.D. Biggs, S.J. Poon y N.R. Munirathanm, Phys. Rev. Lett. **65**, 2700(1990).
- [5] R. Merlin, K. Bajema, R. Clarke, F.-Y. Juang y P.K. Bhattacharya, Phys. Rev. Lett. **55**, 1768(1985).
- [6] Chumin Wang y R.A. Barrio, Phys. Rev. Lett. **61**, 191(1988).
- [7] K. Springer y D. van Harlingen, Phys. Rev. B **36**, 7273(1987).
- [8] S. He y J.D. Maynard, Phys. Rev. Lett. **62**, 1888 (1989).
- [9] L.O. Chua, C.A. Desoer y E.S. Kuh, *Linear and Non-linear Circuits*, (McGraw-Hill, New York, 1987).
- [10] R.J. Elliott, J.A. Krumhansl y P.L. Leath, Rev. Mod. Phys. **46**, 465(1974).
- [11] Chumin Wang y R.A. Barrio, en *Lectures on Surface Science*, editado por F.A. Ponce y M. Cardona (Springer, Berlin, 1992).
- [12] B. Sutherland, Phys. Rev. B **34**, 3904(1986).
- [13] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Mecánica*, (Reverté, Barcelona, 1985).